2 石碇東街吊腳樓

到深坑老街吃豆腐，促進地方經濟繁榮，是每位台北人一生必做的功德之一。不過再深入一點，造訪繁華落盡的石碇東、西老街，可能就興趣缺缺了。我對石碇的第一印象是從電視台主播廖筱君的介紹性節目「石碇東街吊腳樓」得來的，印象中，她介紹在石碇東、西老街上捕捉美景的一些畫家。第一次造訪石碇是為了當地一所完全中學要招考高中數學教師的事宜與對新成立的高一資優班演講而來。校長的宿舍就建在學校內，背後是山坡，好像生活在深山一樣，學校連午餐都是自理兼自助式的。當年還年輕的我，真有一點嚮往。此行的目的就是出一份數學考題，讓學校招考高中部的數學老師。如果要命一道不等式問題，最簡單莫過於拾人牙慧，我也常做這樣的事。我將上一章中，小綠綠所發現的不等式引理當作此次考試的考題之一：

題目：設 p,q,r 是三個滿足

$$0 < p,q,r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

事後閱卷時發現，這則不等式還真難，只有一位應試老師完全做出來，而且他的證法大大的讓我意想不到。這位男老師的證法是這樣的：

參加甄試男老師的瞥見

首先將原來不等式重新詮釋成如下的乘積形式：

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

接著利用幾何模型解釋如下：如果將

$$1 \cdot 1 \cdot 1$$

視為 x,y,z 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積，那麼

$$p\cdot q\cdot 1$$

代表 x,y,z 軸正向上各取 $p,q,1$ 單位之長方體的體積；

$$1\cdot q\cdot r$$

代表 x,y,z 軸正向上各取 $1,q,r$ 單位之長方體的體積；

$$p\cdot 1\cdot r$$

代表 x,y,z 軸正向上各取 $p,1,r$ 單位之長方體的體積；

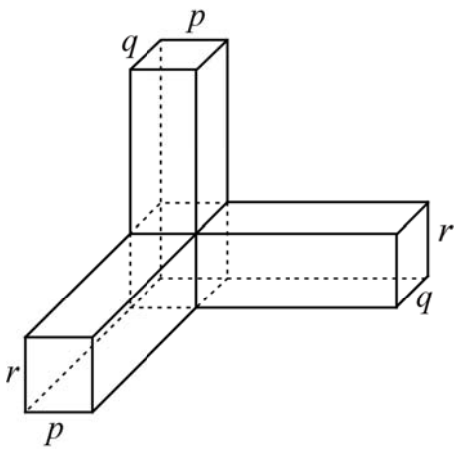
$$p\cdot q\cdot r$$

代表 x,y,z 軸正向上各取 p,q,r 單位之長方體的體積。

在此模型的詮釋之下，

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r$$

就代表如下圖所示的立體形狀之體積



因為這立體形狀在正立方體內，所以

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r<1\cdot 1\cdot 1.$$

利用幾何模型來解不等式問題，是相當高竿的思維。顯然在考試當下，除了必須對不等式所傳達的意思瞭若指掌外，還需瞬間連結到相應的幾何模型，這堪稱為無字證明的一個典範。為什麼我知道這位奇人是個男老師呢？這可是另一個故事的開始！之後沒多久，在一次的演講裡，一位高中老師跑來問我「有一道題目，他這樣解，不知道可不可以？」

就這樣我才認識這位奇人。

本章的題目在師大數學系的推甄也考過，下一練習就是當時一位學生的另一種證法，我把他的證法切割成兩個小題，方便讀者思考：

練習 1　設 p,q,r 是三個滿足

$$0 < p,q,r < 1$$

的實數。

(1) 證明

$$1 - r - pq + pqr > 0.$$

(2) 利用(1)證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

如果你會做這個練習，你將體會到那位考生，將這不等式分割得多麼恰到好處。

石碇東街吊腳樓的練習題解答

練習 1

(1) 因為$1-r-pq+pqr=(1-pq)(1-r)$，又 $pq<1, r<1$，所以

$$1-r-pq+pqr>0.$$

(2) 利用(1)得

$$\begin{aligned}
&1-\left(pq+qr+rp-2pqr\right)\\
&\quad=\left(1-r-pq+pqr\right)+r\left(1-p-q+pq\right)\\
&\quad>0+r\left(1-p\right)\left(1-q\right)\\
&\quad>0+0=0,
\end{aligned}$$

即 $pq+qr+rp-2pqr<1$。