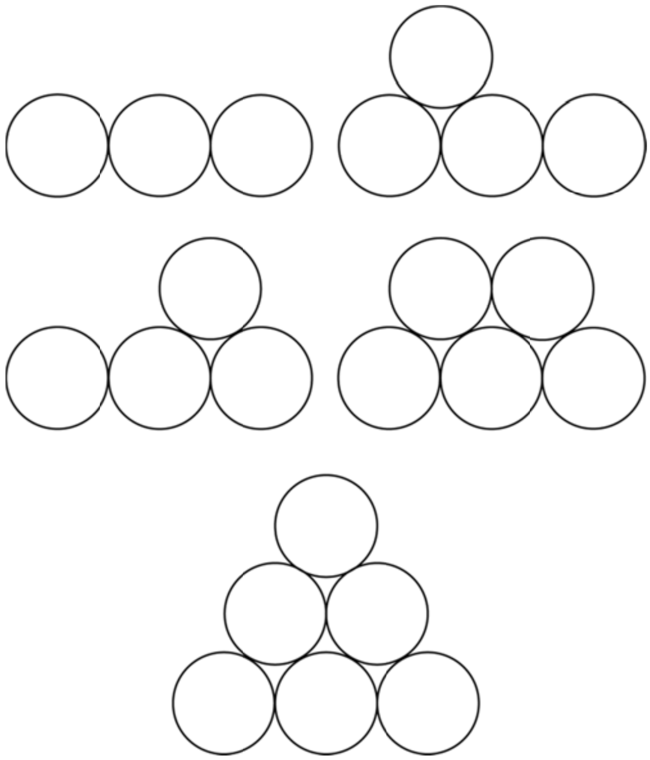
9 七年之癢…來自卡特藍數列的幻想曲

這是擅長出一張嘴巴的教授對上肯花腦筋的教師，所譜出的一齣幻想曲。牛頓是我大學隔壁班的同學，這當然是他的綽號，把他想成與真正的牛頓一樣聰明，或者把他看成比牛還鈍都行，總之，他是介於兩者之間的一位高中數學老師。

據說，人體的細胞每七年會完全更新一次，這當然也包括腦細胞。如果這是事實的話，那麼這裡要講的故事肯定有趣，因為它是貫穿了七年之長的數學連結。這個連結的果是導因於底下的這道數學問題：

題目：(讓圓穩固的堆放模型) 下圖是在底座為三個並列圓的圖形上，放置相同圓的不同方式（一共有五種不同的方式）。放置的唯一要求為：「為了使圖形中的圓穩定，上一列的圓必須與下一列的兩個圓相切」。

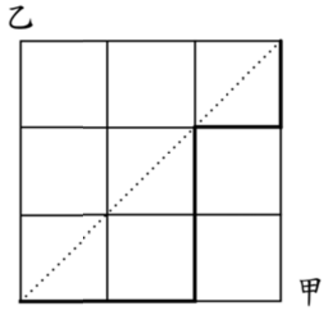


(1) 如果底座是 4 個並列的圓，那麼方法數又是多少？

(2) 如果底座是 n 個並列的圓，令 E_n 是放置的方法數。求 E_n 的一般公式。

這道問題是我從一本英文書翻譯過來，並蒐集在《數學真賞》裡的一道研究題。其實，我漏掉了一個條件，也就是錯譯了原題。但這個錯誤卻引起了一段七年的長篇故事，也幫卡特藍數列增添了一個新的解釋模型。

講了連結的果，現在談連結的因，這要從一道開票一路領先，最後平手的問題談起:「甲、乙兩人角逐某委員會主席，由六人投票產生，開票過程中甲得票數始終不比乙少，最後平手的開票情形有幾種？（沒有棄權票）」對於這樣的問題，我們會用走捷徑的方法來描述：



如上圖所示，粗黑線是從左下角走到右上角的一條捷徑，如果把水平移動想成開出甲的選票，垂直移動想作是乙的得票，那麼最後的得票數一定是平手。上圖中，捷徑所代表的開票情形是

甲，甲，乙，乙，甲，乙.

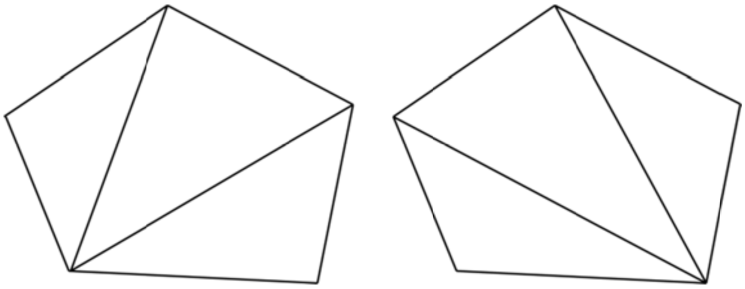
剩下的問題是「開票過程中甲得票數始終不比乙少」該如何解讀？從圖不難發現「若捷徑沒有越過虛線所代表的對角線，則開票過程中甲得票數始終不比乙少」。因此，這問題的答案就是「沒有越過虛線的捷徑有多少種走法？」

如果捷徑棋盤是$n\times n$，那麼沒有越過虛線的捷徑走法C_n該如何計算。事實上，這個數列$\langle C_n\rangle$就是有名的卡特藍數列，它的前幾項依序為

$$1,2,5,14,42,132,\cdots.$$

卡特藍數列是尤拉發現的，他在研究「凸$n+2$邊形上畫$n-1$條互不相交（但可共端點）的對角線，此時凸$n+2$邊形被分割成n個三角形，究竟會有多少種不同的分割呢？」這

問題時發現的：



後來，卡特藍發現這個數跟「將$a_0a_1a_2a_3\cdots a_n$以刮號刮起來的方法數」一樣，於是就用卡特藍英文名字的第一個字母符號C_n來代表這個數字：

$$(a_0a_1)(a_2a_3),\ a_0((a_1a_2)a_3),\ ((a_0a_1)a_2)a_3,\ (a_0(a_1a_2))a_3,\ a_0(a_1(a_2a_3))$$

到此為止，用了「一路領先的捷徑模型」,「多邊形的對角線模型」與「可以運算的刮號模型」三種模型來描述卡特藍數C_n。事實上，還有許多描述卡特藍數的模型或方法，尋找新的，又有意思的卡特藍數模型是數學家的夢想。除了用模型描述外，C_n也可以用組合符號描述如下：

$$C_n=\frac{\mathrm{C}_n^{2n}}{n+1}=\mathrm{C}_n^{2n}-\mathrm{C}_{n-1}^{2n}.$$

1998 年，為了解決一道高中模擬考難題，牛頓在《科學教育月刊》上寫了一篇介紹卡特藍數的文章《一路領先之公式及一些應用》，利用走捷徑的模型，加上一點對稱的觀念，推導上述公式成立。雖然這是一篇介紹性的文章，這個公式也有很多不同的證明方法，但是這個因卻在七年之後結了果。

讓圓穩固的堆放模型中的數E_n該如何計算呢？這看起來似乎不是很容易。如果不具有一點幻想力跟數學連結能力，肯定不容易在這問題取得進展。

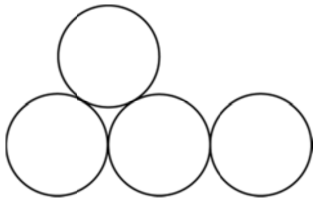
如果你是與高斯一起計算加法

$$1+2+3+\cdots+100$$

的同班同學，你可能會埋頭苦幹般的計算著$n=1,2,3,4$時，所對應的值

$E_1=1, E_2=2, E_3=5, E_4=14$，甚至不亦樂乎的一直往下計算。但是，高斯可不是這樣想

著的，他會先拿個模型來思考，並尋找其規律：



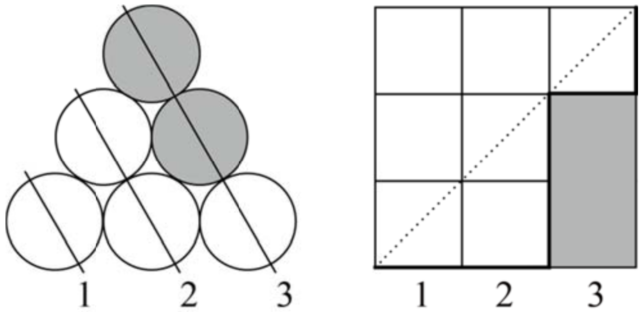
請發揮一下想像力，上述的堆圓模型少了什麼呢？可以補上什麼東西讓它完整、完全或完美嗎？也許這就是規律之所在。在得到規律之前，於黑暗中摸索與歷經掙扎總是難以避免的。

現在就讓我們來欣賞牛頓的巧思與創見：

牛頓的幻想曲

如下左圖所示，將原圖補上兩個黑圓之後，剛好是個完全又完美的正三角形，並畫三條斜線，即編號 1, 2, 3 的粗黑線。接著在右圖劃上三階捷徑方圖，編上第 1, 2, 3 行，在對應的行上，塗以同樣數目的黑方塊。

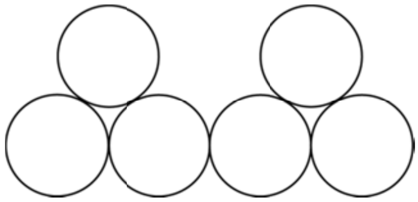
在捷徑圖上，向右沿著黑正方塊的邊緣而行，便產生了一條「一路領先，最後平手」的捷徑。



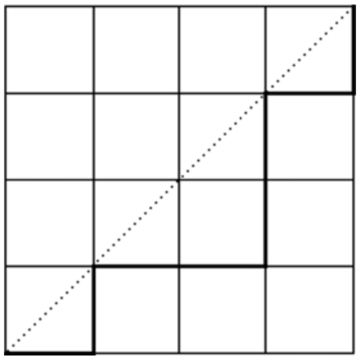
同樣的，針對任一條「一路領先，最後平手」的捷徑也可以反過來畫出其對應的「讓圓穩固的堆放模型」。

因此，讓圓穩固的堆放模型數 E_n 就是第 n 個卡特藍數 C_n。

練習 1　如下圖所示，畫出「讓圓穩固的堆放模型」所對應的「一路領先，最後平手捷徑模型」。



練習 2 如下圖所示，畫出「一路領先，最後平手捷徑模型」所對應的「讓圓穩固的堆放模型」。

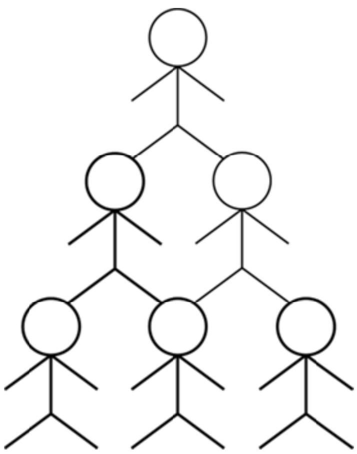


練習 3 (疊羅漢模型) 如下圖所示，底層 3 個人，一共 6 人所疊起的 3 階羅漢，其中粗線條是男生，細線條為女生。為了安全起見，疊羅漢時要求

① 最底層的人一定是男生；

② 男生只能疊在兩個男生上面；

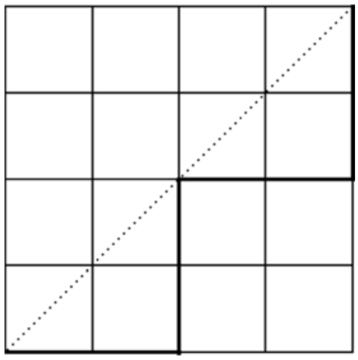
③ 女生可以疊在兩個男生、一男一女或兩個女生上面。



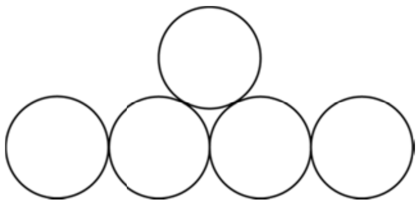
仿 3 階疊羅漢要求，令 n 階疊羅漢的方式有 F_n 種。求 F_3 與 F_n 的值。

七年之癢…來自卡特藍數列的幻想曲的練習題解答

練習 1



練習 2



練習 3

不難發現「疊羅漢模型」與「讓圓穩固的堆放模型」是相對應的，所以

$$F_3 = E_3 = 5,\ F_n = E_n.$$