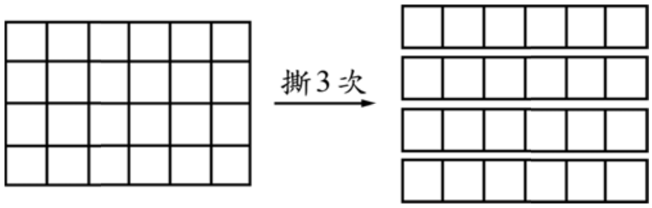
11 他山之石可以攻錯…撕郵票問題

「有一次筆者到郵局寄信，因為要寄的信很多，服務小姐給了我一大張未撕開的郵票，正當我很有耐心將郵票一張一張撕開的時候，腦中突然浮現一個這樣的問題：怎樣撕才最省時呢？不過，仔細一想便覺得這個問題“不成問題”，因為要把一大張未撕開的郵票一張一張分開，就是要把各郵票之間的“連結線”撕開，而“連結線”的總和是固定的，並不隨撕開的方式而有所改變，因此並不存在特別省時的方法。這時心裡覺得有一點無奈，“但是說不定有某一種撕開的方式所需撕裂次數是最少的？”一個新的想法又浮現腦海，正是“山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村”，這一問竟為我開啟一趟“撕郵票之旅”。」這是彰師大數學系學生陳美如在《數學傳播季刊》第 93 期上發表的文章〈撕郵票問題〉的前言。我之所以會讀到這篇文章也是陰錯陽差造成的，原本是找尋我在左營高中實習時，指導學生作科展發表在《數學傳播季刊》上的那篇文章，誤以為在這一本上，回家翻開一看才知道拿錯了。只好將錯就錯，看看手上這本期刊有什麼文章。

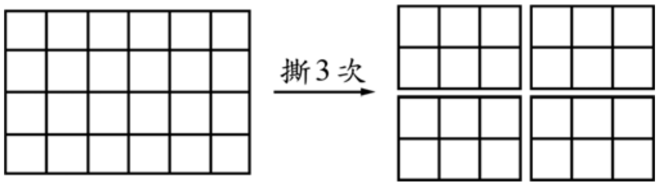
幾年前，彰師大數學系蕭守仁教授經常邀請我去他們的週末班上課，那是開給中部優秀高中生的數學課程。陳美如在那個班做助理的工作，所以知道這個人。我感興趣的是美如竟然能將很平常的「寄信活動」轉變成很有數學思維的「撕郵票之旅」，進而導引出一道有趣的幾何問題。她的問題是這樣的：通常撕開相連的郵票時，會一次把整頁郵票沿某直線撕成兩小頁，稱這樣的撕裂動作為“一次”，例如將一頁 6×4 的郵票撕開成一張張單張郵票至少可以有以下兩種撕法：

(1) 第一種撕法：



然後再把每一排撕 5 次成為一張張單張的郵票，因此共需要撕$3+5\times4=23$次。

(2) 第二種撕法：



再把每一小頁3×2郵票撕一次成3×1的郵票，最後再逐一撕兩次成單張郵票，因此共需要撕$3+(2\times2+1)\times4=23$次。

從這兩種不同的撕法，不難猜到以下意外的結果：

題目：任何一頁$m\times n$的郵票被完全撕開所需撕裂的次數與撕開的方式無關，且其次數恰為$mn-1$次。

美如在那篇文章探索比這更複雜的情形，上述問題只是開胃菜，她把證明留給讀者。沒有提供解答或暗示的問題是最漂亮的，因為每個人都可以自由發揮，提出各式各樣的想法，就像蘇東坡的詩所描述的：「橫看成嶺，側成峰，高低遠近不相同」。關於這個問題讓我想起兩件親身經驗的事情，或者說連結到兩道讓我印象深刻的數學問題，值得跟讀者分享。

在我讀博士班的時候，有一位有名的荷蘭數論學家 D. Zagier 到台灣來訪問，1994 年當威爾斯證明了費馬大定理之後，他也參加邱成桐在香港中文大學舉辦的「費馬大定理」研討會。邱成桐知道 D. Zagier 懂多國語言，就指著桌子上的四個中文字，問他知不知道意思，D. Zagier 搖搖頭說不知道。其實那四個中文字是「保持乾淨」，因為我也參與那次盛會，剛好坐在可以看到那四個字的範圍內。D. Zagier 青少年時得過國際奧林匹亞數學競賽的金牌，對有意思的中學問題也很感興趣，我曾經收藏過他列舉的一串有趣的

中學數學題目及解答。那份收藏可能找不到了，但是有一道與矩形相關的問題及 D. Zagier 對那道問題的解法讓我印象深刻。後來我將那道問題收錄在《算術講義》那本書裡，而且還查到，Wagon 在《美國數學月刊》發表一篇文章[1]，文章裡列舉了有關那問題的十四種不同證法。

[1] Americam Mathematical Monthly, 94 (1987), pp. 601-617.

有一次與台大數學系張海潮教授（現已退休）在大考中心開會，趁空檔期間，張教授說「前幾天，一位旅居美國的華人到台大數學系演講，提到一道矩形問題，你知道那裡可以找到那問題的解答嗎？」其實他提的就是 D. Zagier 收藏的那道矩形問題，我說「有人列舉了十四種不同證法」，他聽了之後覺得不可思議。那道問題的敘述是這樣的：

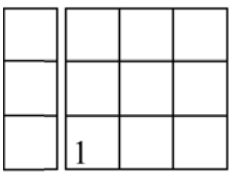
如果一個大矩形可以分割成有限個各種大小可以不等的小矩形，且每個小矩形至少有一邊的邊長是正整數，那麼大矩形也一定有一邊的邊長是正整數。

D. Zagier 對這問題採取反證法，然後把眼光瞄準每個小矩形的四個角落，在每個角落都定義一個整數，然後用兩種方法求這些角落上的數字和，結果發現不相等，得到矛盾。

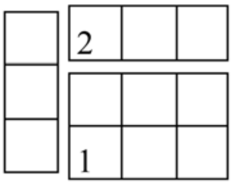
D. Zagier 對這問題的解法啟發了我想到「撕郵票問題」的一種作法。對矩形，你會注意到四個角落，如果是對一個人，那麼你又會注意到人的那幾個點呢？我想答案會依你的心態而有所不同。達文西會重視肚臍的位置或高度，因為他認為「身高除以肚臍高度」這個數字越接近黃金比 1.618，這樣的人越完美。佛教高僧也會重視肚臍，他們認為肚臍附近不僅是質量中心（剛出生嬰兒的重量中心點就在肚臍），也是能量中心。所以當他們靜坐時，經常注視，關照或冥想肚臍的位置，也因為如此，印度人常被西方人笑說成「看著肚臍的人」。看著一單張的郵票，你會注視郵票的哪一點呢？

看一張郵票除了欣賞圖像或風景之外，一定不會錯過的點就是它的面值，底下這張紀念數學家高斯的郵票，面值 10 就寫在郵票的左下角：

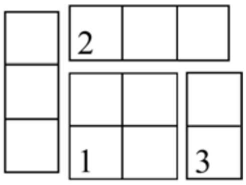
現在就讓我們來一趟「撕郵票，在每張郵票左下角定面值之旅吧」，過程是這樣的，先假設整頁郵票的每張郵票的面額還未決定，它是由你撕裂郵票的方式唯一決定。舉例來說，底下是一頁4×3的郵票，當第一次撕裂是沿著左圖的“鉛直連結線”撕開時，就在此“鉛直連結線”最下方左邊的那張單張郵票上寫上數字1；第二次撕裂是沿著中圖的“水平連結線”撕開時，就在此“水平連結線”最左邊上方的那張單張郵票上寫上數字2；…；依此繼續撕裂及在指定的單張郵票上，標上撕裂次數的數字，直到所有單張郵票都被分開為止。



第1次撕裂



第2次撕裂



第3次撕裂

在繼續之前，先做個練習

練習 1　下圖是一頁4×3的郵票，除了最左下角那一單張外，每一單張的左下角都寫$1,2,3,\cdots11$中的某個數字。

9	11	2	5
3	10	8	7
	4	1	6

請將這頁郵票撕裂 11 次，使得每單張都分離，而且這些指定數字剛好就是依照撕裂程序所填的數字。

有了這練習的經驗之後，現在考慮一般的情形，也就是考慮一頁 $m \times n$ 的郵票：因為每單張郵票最多有上、右、下、左四條“連結線”（邊上的單張郵票只有三條，角落的單張郵票只有兩條“連結線”），又撕裂過某單張郵票的上、右兩條“連結線”時，不可能將數字填入這單張郵票上，所以每單張郵票最多只會被填兩次數字（撕裂到此單張郵票的下、左兩條“連結線”才有可能）。進一步分析，不難發現這種填數字的方法有如下的性質：

① 第 1 次撕裂所填的數字 1 一定在這頁郵票的邊緣（左緣或下緣）某單張郵票上。

② 整頁最左下角的那一單張郵票不可能被填數字。

③ 每單張郵票最多只會被填一次數字。

④ 除了最左下角那一單張外，每一單張郵票剛好被填入一次數字。

從這些性質得，對一頁 $m \times n$ 的郵票，除了最左下角那一單張外，每一單張郵票剛好被填入一次數字，也就是說，有 $mn-1$ 張郵票被填入數字。因此，填入最大的數字為 $mn-1$，即總共撕裂 $mn-1$ 次。

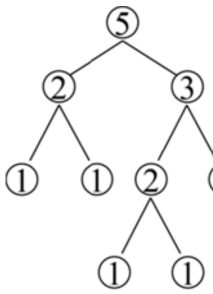
上述的解法是把撕裂次數與每單張郵票作了一一對應（除了最左下角那一單張沒對應外）。這都要歸功於 D. Zagier 那問題解法的啟示，及郵票左下角面額數字的暗示，才有辦法得到這規律。

接下來談論第二個想法，在談論之前，先把問題重新敘述成比較容易用數學歸納法證明的形式：

題目：任何一頁由 N 張單張郵票所構成的矩形郵票，被完全撕開所需撕裂的次數與撕開的方式無關，且其次數恰為 $N-1$ 次。

「撕郵票問題」讓我想到一道有趣的問題，那問題是這樣說的：

月餅專賣店為了促銷，想出如下的花招：一盒月餅有n個，售價由顧客玩遊戲來決定，遊戲是這樣的，顧客須將n個月餅分成兩堆（每堆至少一個），並將兩堆的月餅個數相乘，得到第一個乘數。然後再將第一堆及第二堆各別再分成兩堆（每堆至少一個），又可得到兩個乘數。依此繼續下去，直到每一堆剩下一個月餅（不能再分）為止。這樣會產生很多乘數，n個月餅的售價就是這些乘數的和。你知道如何將n個月餅分堆，才最省錢嗎？下圖是阿三在他的分堆方法之下，買五個月餅的錢數：



$2\times 3=\boxed{6}$

$1\times 1=\boxed{1}\ 2\times 1=\boxed{2}$

$1\times 1=\boxed{1}$

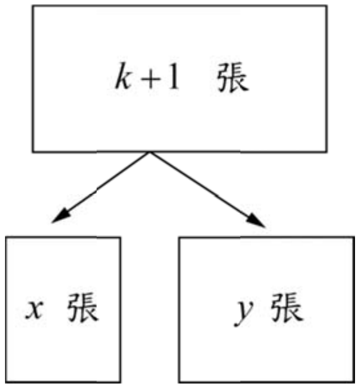
阿三這樣的分堆買五個月餅須付$6+1+2+1=10$元美金。

我把這道問題稱為“用算術騙人的商店”，因為無論你如何分月餅，你所需要付的錢都是$\dfrac{n(n-1)}{2}$元。這道問題跟「撕郵票問題」很像，只是一個是“分月餅”，而另一個是“撕裂郵票”的差別而已。“用算術騙人的商店”這道問題的解法是數學歸納法，就讓我們把它移植到「撕郵票問題」上看看吧！

(1) 當$N=1$時，不需要撕裂郵票，所以撕裂次數為 0 次，與$N-1=1-1=0$相等。

(2) 假設$N=1,2,3,\cdots,k$時，所需的撕裂次數分別為$N-1$次。當$N=k+1$時，令第一次撕裂之後，所撕裂的兩頁郵票分別為x與y張，顯然有

$x+y=k+1, 1\le x<k+1, 1\le y<k+1$，即$x+y=k+1, 1\le x\le k, 1\le y\le k$ 。



因為$1 \le x \le k$，所以由假設知x張那一頁被完全撕開還需$x-1$次。同理，y張那一頁被完全撕開還需$y-1$次。故$k+1$張那一頁被完全撕開共需

$$1+(x-1)+(y-1)=(x+y)-1=(k+1)-1=k(次),$$

得證。

練習 2　利用數學歸納法證明，無論如何拆分，分n個月餅都需要$\dfrac{n(n-1)}{2}$元。

利用數學歸納法證明「撕郵票問題」，證法雖然簡潔，但會有見樹不見林的感覺；利用填數字的方法證明「撕郵票問題」，雖然過程繁瑣些，但可以讓你見樹亦見林。你喜歡哪一種呢？或者你有自己的一套呢？接下來介紹我在中央研究院數學所培訓奧林匹亞選手時，師大附中何同學最直接了當的作法：

何同學的直覺

把撕郵票想成一般的撕紙張，第一次將他撕成 2 張，第二次，從中選一張再將他撕成 2 張，第三次，再從中選一張將他撕成 2 張，依此繼續下去，直到撕成mn張時就是所有單張郵票都分離的時候。

假設需要撕k次才能使所有單張郵票都分離。觀察撕第一次，二次，三次後的總張數分別為$2,3,4$張，因此撕k次後的總張數應為$k+1$張。由$mn=k+1$得$k=mn-1$，即將$m\times n$張的整頁郵票完全撕開所需的次數為$mn-1$次。

何同學看出撕郵票與任意撕紙張有張數的對應，不需把將焦點集中在撕郵票這個動作的迷障裡。

最後讓我們欣賞一幅李華倫教授所畫，讓數學郵票隨著圓周率$\pi = \mathbf{3}.141592653\cdots$起舞的畫：

他山之石可以攻錯…撕郵票問題的練習題解答

練習 1

略。

練習 2

(1) 當 $n=1,2,3$ 時，與猜測的答案相同。

(2) 假設 $n=1,2,3,\cdots,k-1$ 時，無論哪一種分法，所需要的錢都是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 美金。當 $n=k$ 時，設第一次將月餅分成 a 個與 $k-a$ $(1\le a\le k-1)$ 個兩堆。那麼所產生的第一個乘數為 $a\cdot(k-a)$。根據假設，a 個那堆繼續分下去所產生的乘數總和為 $\frac{a(a-1)}{2}$；而 $k-a$ 個那堆繼續分下去所產生的乘數總和為 $\frac{(k-a)(k-a-1)}{2}$。

因此乘數總和為

$$a(k-a)+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(k-a)(k-a-1)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}.$$

因此無論如何分，所需要的錢數都是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 美金。