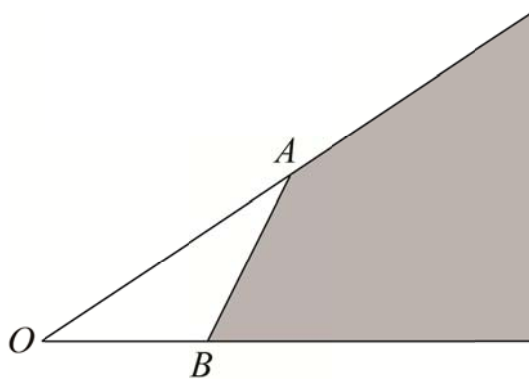


8 返本還源已費功，爭如直下若盲聾

8.1 返本還源已費功，爭如直下若盲聾

患有白子，腦性麻痺，盲生或身心障礙的人，在許多方面，都被認為學習不易。有時候，這只是一種偏見，記得跟我一起讀博士班的同學裡，就有白子與腦性麻痺者，他們也都畢業找到工作。這裡要談的是一則料想不到的故事，整個故事與九十四學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第六題有關。就讓我們先複習一下那道試題：

題目：如下圖所示，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點。



試問下列選項中，哪些向量的終點會落在灰色區域內：

(1) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

(2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

(5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

大考中心對外公佈的參考答案是(1)(2)，你認為這答案正確嗎？讓我告訴你一位不受重視的奇人故事。事實上，這位奇人是參與該年度學測的一位盲生。

盲生需借助手觸摸特殊處理的點字卷才能讀懂題意，進行答題，所以大考中心必須為盲生額外準備各種考科的點字卷。少了靈魂之窗的幫忙，對學習數學來說，無疑是很大的阻礙，但是也有例外者，例如數學家尤拉就是有名的盲人，他的著作非常豐富。大概由於眼盲的關係，尤拉的創見皆與代數或組合之類的有關，與圖形相關的幾何發現較少；另一個例子是上世紀俄國有名數學家龐特里亞金，他也是一位盲人。

少了眼睛的幫忙，除了看不見美麗的圖案外，對幾何問題的思考，總是沒有那麼具體。但是，也許也會有意想不到的好處，如比較不會有先入為主的觀念或想當然爾的迷失。一位盲生正用手觸摸著數學點字卷第六題，經過一番觸摸與思考之後，他舉手發問：「這道題目好像少畫一個點。」監試人員回報盲生的疑問，經數學人員看了之後，認為是盲生程度比較差，沒有搞清楚問題，建議向盲生回報：「題目沒問題，你再仔細想一想。」就這樣大考中心錯過了發現題目出錯的第一時間。

數學考試結束後，補教界忙著出解答，搶在各家之前發放。大考中心當然也必須在隔天開答案檢討會議，選在隔天檢討有許多好處，可以收集坊間補習班，出版社，報紙的解答與評論，檢討起來比較不會出問題。在檢討會議之前，坊間的參考答案也都認為是(1)(2)無誤。檢討會議中，一位正教向量的高中數學老師說：「問向量的終點，需先知道向量的起點才能作答，這問題並沒有說起點在哪裡，所以無解。」

顯然地，出題者以為 O 是起點，相信大部分考生也都這樣想，這是因為考卷上的圖形誤導了你。當一面看圖形，一面思考時，很容易陷入自以為是或跳躍思考的情境裡。盲生比較不會有這方面的困擾，所以可以發現試卷上少的起點。最後向最先發現問題的那位盲生致最高的敬意。

練習 1 既然大考中心發現了該題出問題，理應將這道題目送分才是，但為何他還是公佈答案為(1)(2)呢？

8.2 需要幾個條件才能唯一的決定一條圓錐曲線

九十四學年度指考《數學甲》多選題第九題：

題目：有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x 軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：

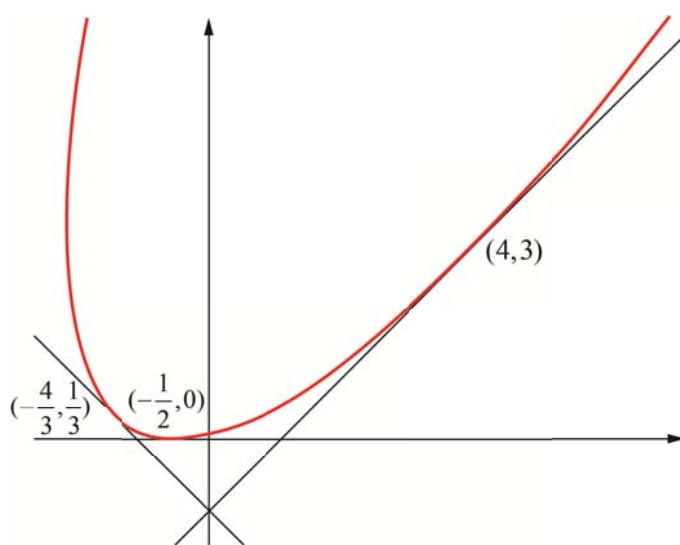
- (1) 此拋物線的對稱軸必為 y 軸。
- (2) 若此拋物線對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1。（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）
- (3) 此拋物線的頂點必在 x 軸上。
- (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

補教協會在考試後公布的答案為(1)(2)(3)，但大考中心公布的答案是(2)(4)，究竟誰是誰非呢？如果以大考中心的答案為正確答案，那麼補教協會在這題不僅沒得到分數，還被倒扣 4 分，這樣一來一往將差距 12 分之多。這問題的關鍵在第(4)選項，是否有不是標準的（歪的）拋物線滿足此條件。如果有，那麼第(1)選項就不該選。所以「找一條滿足題意三條件的歪拋物線」是整個問題的重點，但是這已超出高中數學範圍。

事實上，滿足上述三條件的歪拋物線是很多的，但是想要找一條可能都要花許久的時間。

這裡提供一條歪拋物線給讀者參考：拋物線 $\Gamma: 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$ 與 x 軸、

直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 分別相切於點 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 、點 $(4, 3)$ 與點 $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 。



▲ 拋物線 $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$

出這道問題的教授顯然就是要測驗學生找歪拋物線或者理解歪拋物線的能力，但是沒有

拿捏好難度，導致連補教協會的老師們都做不出來。像這樣的問題，雖然題目沒有出錯，但在拿捏上，離學生與老師的思維太過遙遠，也算是很不好的題目。存在，但很難找得到或者找不到，是數學很常有的現象。在中學的測驗上，應盡量避免出這類問題。

這道問題的第四選項，在大考中心所開的答案確認會議上，引起很多的討論，大多數的教授約需花三四十分鐘的時間才能找到一條滿足條件的歪拋物線。對考生來說，不太可能在考試時間內找到歪拋物線，只能憑直覺用猜的，但猜對與猜錯卻相差十二分之遙。不僅大考中心關心這道問題，中學教師也對這道問題有興趣。七月十日，曾學長從南部打電話給我，問我「補教協會的答案跟他做出來的答案不一樣，不知道如何是好」，他發現一個性質「這種拋物線的焦點落在過 $(-1,0)$ 、 $(1,0)$ 、 $(0,-1)$ 三點的外接圓上。」七月十一日，接到沈老師的文章，也是在談論這道問題，他想把這文章刊在我主編的《數學新天地》上。他的文章就是在談論德國數學家藍柏特發現的一個定理：拋物線的三條相異切線，任兩條的交點，共三點，會與焦點共圓。至此真相大白，原來出題教授是出一道藍柏特定理的特例。

七月十二日在師大數學系辦遇見趙文敏老師，他說「二十幾年前，他在《科學教育月刊》上所寫的幾何文章裡，談過藍柏特這個定理，而且還知道三條切線所形成的三角形之垂心落在拋物線的準線上。」

8.3 相鄰好，還是擺在同一區塊棒

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》選填題第 F 題：

題目：某地共有 9 個電視台，將其分配給 3 個新聞台，4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道分配方式共有 242526 種。

「相鄰」是大家心知肚明，而且排列組合常用的專有名詞。就因為這樣，我們從未在數學課本裡定義過「相鄰」的數學意義。從大考中心公佈的答案 576 可以推敲，其相鄰是

指

體體 綜綜綜綜 新新新

或

體體 新新新 綜綜綜綜

這兩種排列方式。這兩種排列方式一共會產生

$$2! \times 4! \times 3! + 2! \times 3! \times 4! = 288 + 288 = 576$$

種頻道分配方式。

但是，有一群高中數學老師認為：將題意中的「同類型電視台的頻道要相鄰」改成「同類型電視台的頻道要擺在同一區塊」才是這兩種排列方式，否則還需考慮像

體體 綜綜 新新新 綜綜

這樣的第三種排列方式。因此，正確答案應該為

$$576 + 2! \times 4! \times 3! = 864.$$

大考中心的統計得知，寫 576 當答案的考生有七萬多人，將 864 當答案的也有千餘位。你認同第三種排列方式符合「相鄰」這兩個字的意涵嗎？或者認為，既使第三種排列方式不算「相鄰」，寫 864 當答案的那千餘位考生肯定是會作此問題的，只是對「相鄰」的認知不同而已，所以應該給分。

練習 2 如果大考中心希望你來訂定標準答案，你會選擇下列何者呢？

- (1) 576 (原來答案)。
- (2) 864 (採納一些高中老師的答案)。
- (3) 576 (或 864)。
- (4) 864 (或 576)。
- (5) 送分 (皆大歡喜)。

練習 3 如果要修題，你會選擇下列何者呢？

- (1) 「同類型電視台的頻道要相鄰」。
- (2) 「同類型電視台的頻道要擺在同一區塊」。
- (3) 「同類型電視台的頻道要完全相鄰」。
- (4) 其它（有更好的敘述方法）。

8.4 題目敘述長，答對率就低嗎？

最近幾年學測與數乙的考題經常出現敘述冗長的題目，中學老師經常反應，他們的學生不是不會作，而是國文程度不好，讀不懂題意。敘述長的數學題目，答對率就低，鑑別度就差嗎？就讓數字來說話。

單選題與選填題的答對率很容易界定，答對就是 1，答錯為 0，至於多選題的答對率，大考中心是這樣規定的，所有選項全答對為 1，僅答錯一個選項為 0.5，其餘算 0。

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第 11 題：

題目：將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有

$$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6$$

三種，又 3×6 是這三種分解中，兩數的差最小的，我們稱 3×6 為 18 的最佳分解。當

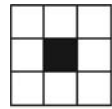
$p \times q (p \leq q)$ 是正整數 n 的最佳分解時，我們規定函數 $F(n) = \frac{p}{q}$ ，例如 $F(18) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

下列有關函數 $F(n)$ 的敘述，何者正確？

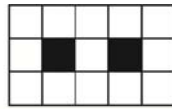
- (1) $F(4) = 1$ 。
- (2) $F(24) = \frac{3}{8}$ 。
- (3) $F(27) = \frac{1}{3}$ 。
- (4) 若 n 是一個質數，則 $F(n) = \frac{1}{n}$ 。
- (5) 若 n 是一個完全平方數，則 $F(n) = 1$ 。

從答對率的規定，相信稍有數學計算能力的人都會認為，多選題的答對率不容易很高，簡單的單選題或選填題的答對率才有可能比較高。從大考中心過去的統計數據觀察，也印證這樣的猜測，多選題的答對率很少超過50%。

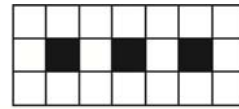
九十五學測考完後，相信大多數的數學老師都會認為選填題第 G 題：用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 個



第 2 個



第 3 個

拼第 95 個圖需用到 272829 塊白色地磚。

應該是答對率很高（甚至很多老師都認為應該是全卷答對率最高，最簡單的題目）。事實上，這題的答對率確實很高，達到 71%，鑑別度 0.52 也很棒。可惜，它並不是全卷答對率最高的題目。

我曾試著讓幾位高中老師猜答對率最高的題目是那一題？結果發現，大多數很少能在五題以內猜中，甚至猜了十題還未中的也不少（學測只考二十題）。

多選題第 11 題就是答對率最高的題目，高達 76%，鑑別度也高達 0.57。可見，題目敘述長，國文程度不好，不見得是主要原因，沒辦法抓到其中的數學元素，可能才是關鍵。

返本還源已費功，爭如直下若盲聾的練習題解答

練習 1

其實大部分的考生都認為 O 就是起點，將這問題送分反而比用 (1)(2) 當標準答案不好。從大考中心公佈的作答情形得知，這題的鑑別度很高。這也印證了「送分只是得到真理，但不見得最公平。」不知你同意大考中心這樣的處理嗎？