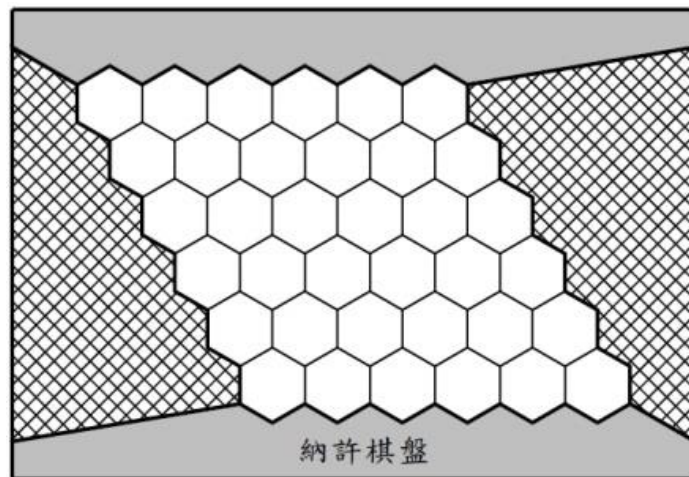


16 納許棋的奧秘

看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋盤，據說是他在普林斯頓高等研究院的廁所發現的。因為廁所的磁磚是正六邊形鋪成的，所以納許棋是跟正六邊形有關的遊戲。

16.1 納許棋的奧秘

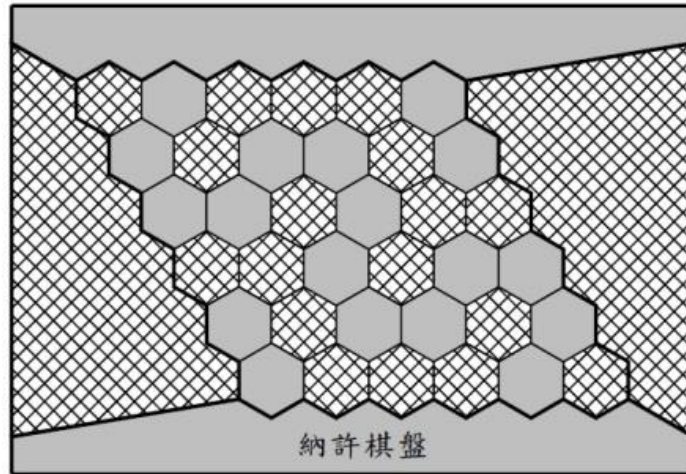
我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形磁磚鋪成）：



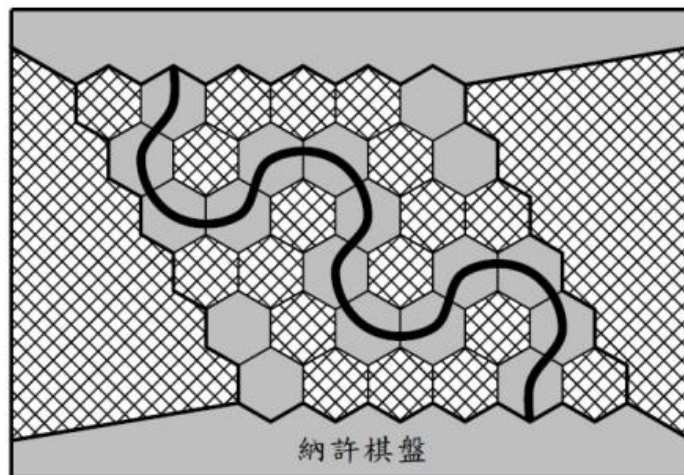
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀

土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那麼另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是這裡所要討論的問題：

題目：（納許棋）無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

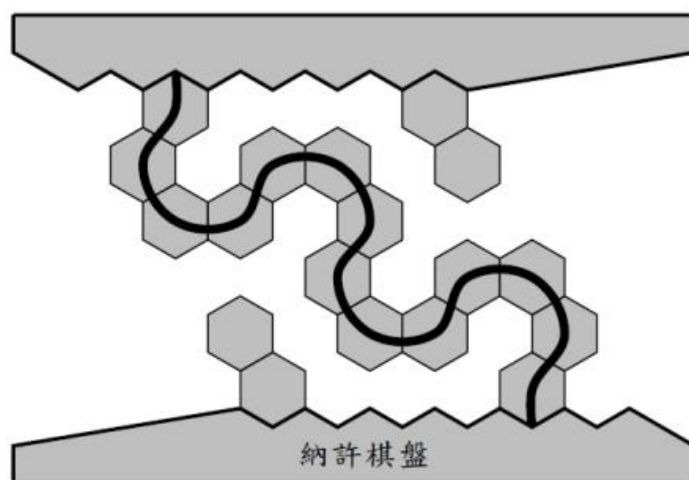
灰姑娘的勞作解法

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根據考古其歷史可追溯到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。證明方法是這樣的：

- ① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。
- ② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。
- ③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。
- ④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。
- ⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。
- ⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



到此，我們已經知道納許棋是一種不會合棋的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

16.2 人類的創造力從何而來…捏泥成壺的巧手

小時候學到的諺語「秀才不出門，能知天下事」大意是說“只要蹲在家裡讀報紙或看電視就可以瞭解許多世界上的事情。”不過曾幾何時，Yahoo，Google，Skype Phone 等網際網路與成千上萬的網頁、部落格則取代了報紙，電話與電視的功能。在美國，有名的電話公司一家家的倒閉，全世界的許多新聞報紙也陸續關門。這一切都要拜電腦的蓬勃發展所賜。上網找資料，網拍，聊天，閱讀文章與電子書，製作網頁與收發電子郵件已成為現代人類最重要的娛樂之一，而且這些活動的花費都很便宜。例如本期的《科學人》雜誌上網就可以閱讀到裏頭許多文章，根本不需要花錢買，甚至連走路到書局翻閱的時間都可以省下來。有了網路之後，知識的取得變得既快速，又容易，那麼人類的點子，想法，創新，創意與創造力是否也會跟著網際網路飆漲而快速增長呢？二〇〇五年十一月《科學人》的封面故事就是在談“人類的創造力從何而來？”早上起床，沒一會兒的功夫，就從家裡的電腦下載，且讀完全文了！讀完這文章，讓我馬上聯想到這陣子正在閱讀的一本書…佛洛伊德的《夢的解析》。

在一九〇〇年，佛洛伊德出版他最有名的心裡學書籍《夢的解析》，書裡有一段跟人的創造力有關的文字，那是偉大的詩人席勒與哥爾納通訊中的一段文字，在那段文字裡，

席勒對一位抱怨著自己缺乏創造力的朋友，作如下的回答：「就我看來，你之所以會有這種抱怨，完全歸咎於你的理智加在你的想像力之上的限制，這兒我將提出一份觀察，並舉一譬喻來說明。如果理智對那已湧入大門的意念，仍要作太嚴格的檢查，那便扼殺了心靈創作的一面。也許就單一個意念而言，它可能毫無意義，甚至極端荒唐的，但跟隨而來的幾個意念，卻可能是很有價值的，



▲德國詩人席勒

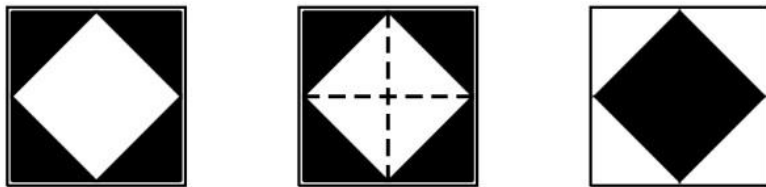
也許，雖然幾個意念都是一樣的荒謬，但合在一起，卻成了一個饒具意義的聯繫。理智其實並無法批判所有意念，除非它能把所有湧現心頭的意念一一保留，然後再統籌作一比較批判，就我看來，一個充滿創作力的心靈，是能把理智由大門的警衛哨撤回來，好讓所有意念自由地，毫無限制地湧入，而後再就整體進行檢查。你的那份可貴的批判力（或者你自己要稱它作什麼），就因為無法容忍所有創造者心靈的那股短暫的紛亂，而扼殺了靈感的泉湧。這份容忍功夫的深淺，也就是一位有思想的藝術家與一般夢者的分野。因此，你之所以發現毫無靈感，實在都是因為你對自己的意念批判得太早、太嚴格。」這是一七八八年十二月一日的信，被佛洛伊德收錄在《夢的解析》這本書的第二章。人的思考可以粗分成兩大類，也就是收斂型思考與發散型思考，它們分別由左後腦與右後腦所啟發。當學生在做一道單一選擇題時，他就正在使用收斂型思考，將可能的範圍縮小，最後聚焦於正確的答案上。這種逐步縮小範圍的思考模式就是收斂型思考，由左後腦來啟動，優點就是可以井然有序，專注，聚精會神，缺點就是缺乏創造力。學校的教育就是典型的收斂型思考方式，補習教育更是如此，原因是收斂型思考對考試成績是有幫助的。另一個思考模式為發散型思考，當一位認真負責的老師在出一道單一選擇題時，他必須注意到潛在的所有錯誤選項，並將它們設計為選項之一。這樣的單一選擇題才有意思，才能達到真正的測驗目標。找出所有潛在錯誤選項的思考模式就是典型的，也是最簡單的發散型思考，它由你的右後腦發動。發散型思考是整個創造力的泉源，它不預設任何立場，也不會太早作判斷，容許任何思緒與想法並存。利用剪紙證明納許棋是一道不會平手的遊戲，就是發散型思考。收斂型思考者不可能想到剪紙這種與數學解題無關的工具，可以幫忙解題，這種念頭一湧入頭腦，馬上被排除，這是收斂型思考的

缺陷。

有關收斂型與發散型思考，我們節錄一段吉弗德的話「對收斂型思考而言，結論或答案只有一個，思考會被限制或控制，而循著獲得特定答案的方向進行…，相反地，進行發散型思考時，你的大腦會恣意揮灑，搜尋所有可能的答案，這種思考模式常發生在沒有固定結論的時候。發散型思考的特性是不受目標束縛。你有足夠的自由，可以進行多方位的思考，推翻舊的解決之道，在必要時朝某方面突破、創新。愈能尋獲資源的生物體，成功的機率愈大。」

手感細膩有創造力的雙手可以是「捏泥成壺的巧手」，而富有創造力的頭腦是「善用比喻的頭腦」。據說，愛因斯坦在通俗演講中，為了能生動比喻而進行的思考，無疑的助燃了他創造的天分。

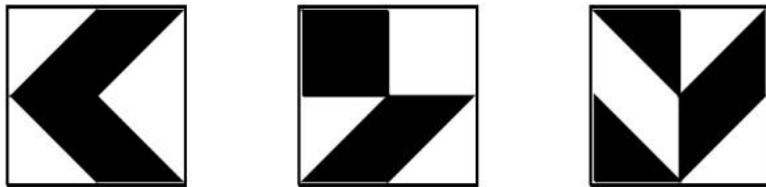
練習 1 如下第一圖所示，正方形中心畫一個鑽石菱形。現在將正方形平分成四個小正方形（第二圖），將右上與左下交換，右下與左上交換，得到第三圖。



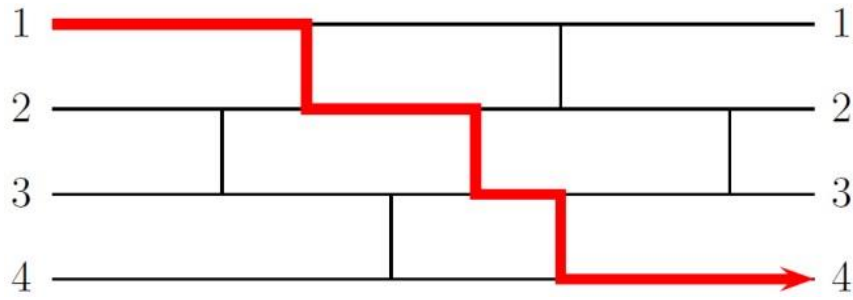
▲ 鑽石遊戲

像這樣，將四個小正方形的位置互換所產生的圖形，稱為原圖的置換圖。試問：

下列三個圖，哪幾個是置換圖。



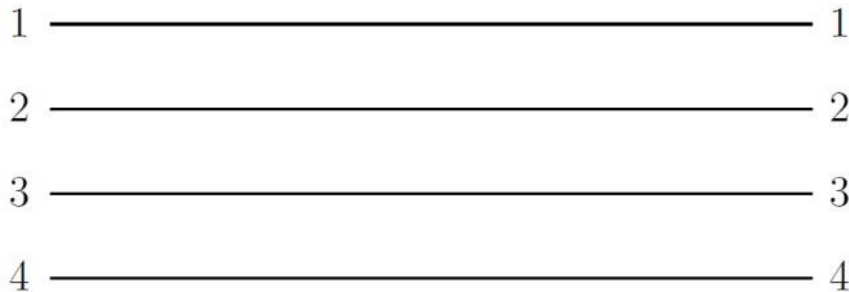
香港有個地產集團設立「恆隆數學獎」（由丘成桐院士主持），用來獎勵中學生在數學科展上的貢獻。首屆（2004年）銅牌獎是在討論「畫鬼腳」這道中國的傳統遊戲。如下圖所示，在四條平行線間畫了七條鬼腳後，左邊的數字1往右前進，碰到鬼腳就轉彎，最後抵達數字4的位置。



〈鬼腳圖〉

同樣的方法可以發現，數字 2 會走到 2 的位置，數字 3 會跑到 3 的位置，而數字 4 會到達 1 的位置。為了方便起見，就用函數「 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$ 」來描述這鬼腳圖的結果。看似簡單的鬼腳圖，其實裡面隱藏著許多深邃的數學知識。就讓我們來一道鬼腳大餐吧！

練習 2 甲、乙兩人輪流在下圖中畫鬼腳，甲先畫一條鬼腳，接著換乙畫，…，依此次序輪流畫。



〈鬼腳圖〉

至於鬼腳畫在何處，甲、乙兩人可以自由決定。當有人畫完鬼腳之後，所對應的函數為「 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$ 」時，此人得勝，比賽停止。

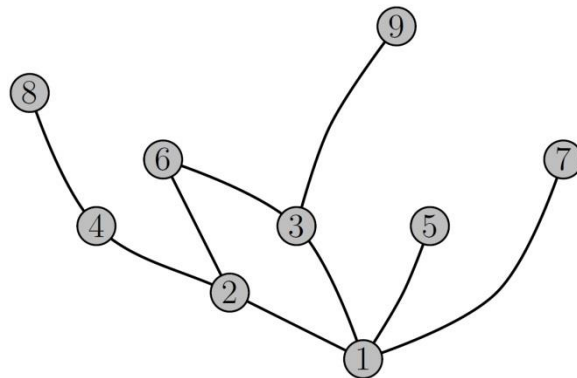
問何者可以得勝。

練習 3 (拔“數”遊戲) 如下圖所示，在種植編號分別為

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編

號 6 的樹被拔掉時，編號 1, 2, 3 (6 的因數) 的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。
最後把樹拔光的人獲勝。



〈拔數圖〉

問何者可以得勝。

練習 4 這是一道“讀心數”的遊戲，規則是這樣的：玩者先想任意兩個數（不告訴任何人這兩個數），叫做 a_1 與 a_2 ，接下來將這兩個數相加，令 $a_3 = a_1 + a_2$ ，再將 a_2 與 a_3 相加，得 $a_4 = a_2 + a_3$ ，如此繼續下去，得到數列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_7, \dots, a_{10}.$$

你只需告訴我 a_7 的值，我就知道

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$$

的值。個中道理為何呢？

納許棋的奧秘的練習題解答

練習 1

第一與第三圖是置換圖。

練習 2

欲畫成「 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$ 」的鬼腳圖，需要奇數條鬼腳。所以後玩者沒有贏的策略，但是後玩者可以攪局，讓遊戲平手。

練習 3

先玩的甲會贏，贏的策略就是拔掉編號 2 的樹，說明如下：當甲拿走編號 2 的樹之後，剩下獨立的 5, 7，連在一塊的 8, 4 與互為犄角的 9, 6, 3 八棵樹。當乙取 5 或 7 時，甲就對應拿 7 或 5；當乙取 8 時，甲就對應拿 3；當乙取 4 時，甲就對應拿 9；當乙取 6 或 9 時，甲就對應拿 4；當乙取 3 或 9 時，甲就對應拿 8。在這些情形下，容易推得，甲將取走最後一棵樹。

同理，甲一開始就拔 5 或 7 號的樹，也會獲勝。

練習 4

設 $a_1 = A$, $a_2 = B$ 。經計算得

$$a_3 = A + B$$

$$a_4 = A + 2B$$

$$a_5 = 2A + 3B$$

$$a_6 = 3A + 5B$$

$$a_7 = 5A + 8B$$

$$a_8 = 8A + 13B$$

$$a_9 = 13A + 21B$$

$$a_{10} = 21A + 34B.$$

這十個數相加得到

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 55A + 88B = 11(5A + 8B) = 11a_7.$$

所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$ 的值是 a_7 的十一倍。