18 不離文字與不立文字…語、默有分，頓、漸有別

為了診斷並找出數學學不好的病兆，幾年前有幾位數學教授身穿白袍，打扮成醫師的模樣，接受學生與家長的預約看診。當然他們是想透過與家長及學生的直接面談、心理諮詢，利用醫師給人的制約形象，好讓學生有信心讀好數學。但是一陣子之後，不知為何就沒實施了，真想問他們「這樣做真的有效嗎？」只是一直都沒敢問就是。像這樣，透過文字語言與家長及學生直接交流，坦開心胸，並借用白袍，聽診器這樣的橋樑或仲介工具，到頭來，會不會只是給了家長及學生安慰劑而已呢？

對一位數學不靈光的人來說，如何才能正確的診斷出他的數學病因呢？同樣的，對一位數學不錯的人,怎樣的建議才能讓他的數學能力更上一層樓呢？說來奇怪,生病與健康，看似相反，其實是相通的。想想看！沒生過病的人，怎麼會瞭解健康呢？同理，說自己健康的人，他肯定以前生過病。生病與健康是互相依賴存在的兩個詞。生病的人渴望健康，但未必能得到健康，但是，真正健康的人不僅知道健康，也經歷生病。所以真正健康的人不僅知道健康，也瞭解生病。同樣的情形也發生在傻瓜與天才的區分上，傻瓜只不過是混亂了的天才，而天才只不過是整合過的，歸於中心的傻瓜。傻瓜與天才並不是兩條平行線，它們可以透過梯子連結，傻瓜是梯子最低的那一階，而天才是梯子最高的那一階，只要找到攀爬梯子的竅門，傻瓜就是天才了。數學傻瓜解決數學問題特別看重仙方，忽視睡方；但數學天才卻反其道而行，不覓仙方，覓睡方。究竟我們的數學能力處於梯子的那一階呢？這正是本文所要討論的重點。就讓我們從中醫「望、聞、問、切」開始吧！

中醫有傳統的所謂「望、聞、問、切」四種基本診斷病情的方法（俗稱四診），其中的「聞」診含鼻聞與聽聞兩種，「切」診就是切脈，把脈的意思，旨在探詢語言文字所不能達到的深沉意識。「望」診就是用眼睛觀察，一種最具體的診斷行為；「聞」診除了嗅聞味道外，還需聽聞病人的病痛描述，一種被動的診斷行為；「問」診就是提出問題，詢問病人，病人必須回答醫生的問題，這是一種主動的診斷行為。「望」診是具體的，

而「聞、問」兩診卻是抽象的，語言文字本來就只是一種橋樑、仲介或溝通功能而已，它不是病痛本身，所以用它來描述病痛，只能算是抽象的陳述，搔到癢處而已。中醫的精髓在「切」診，把脈是「具體中帶有抽象的味道，抽象裡透露出具體的行為」的診斷方法。「切」診兼融了具體與抽象的好處，摒除了具體與抽象的惡處。應用得妙的話，把脈就像「詩中有具體的畫，而畫中卻帶著抽象的詩」一樣完美。

總而言之，「望、聞、問」三診只能得到病的表面或徵兆（如發燒，口渴，畏寒，削瘦，水腫或肥胖等），無法知道病因。因此，中醫師除了看病人具體的表象與病人用語言文字描述的抽象表徵外，還要不著於這兩者的第四診「切」診…直指病心，找到病因。所以表象與語言文字描述只是參考，切脈或深入意識的探詢才是重點。好的中醫師應該衝破病人的表象與語言文字描述這兩道橋樑，並深達病人的意識，潛意識，無意識，甚至超意識。診斷病人如此，衡量自己學數學的得失與教育學生學習數學何嘗不是這樣呢？

從中醫的四診知道，前三診是離不開文字的描述病徵，從具體的看表象，進入抽象被動的陳述，深入主動抽象的詢答。這是一種循序漸進，找出病因的方法。但是，終究它們只是手段或過程，僅供參考，不是終極目標。深入意識，直指病心的「切」診，這種不著文字，瞬間頓知病因的方法才是治本的良方。所以中醫的四診就是從不離文字的前三診循序漸進學習，最終進入不立文字、不著文字的頓知病因。文字描述病情只是一種過渡，仲介或溝通的橋樑，頓知病因，忘掉文字才是第四診的真義。既然疾病是說不得的東西，但為了教導後人習醫把脈，說不得的東西如何說，就成為難事了。

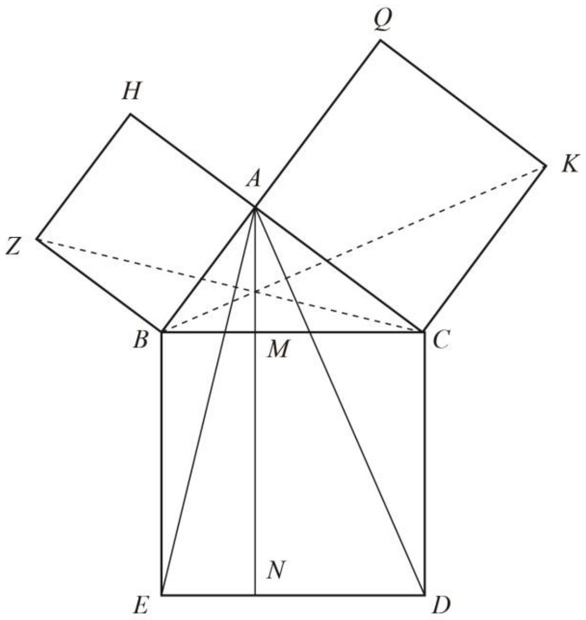
不僅醫學的學習如此，數學的學習也有相近之處。數學原本是不著文字，瞬間頓瞭的真理，但是為了流傳，只好把說不得的智慧，用文字寫下當成知識流傳與教授。因此，不離文字與不立文字，雖然形式上相反，但實質上卻相通，也就是說，在文字語言的詮釋下，逐漸學習（漸）數學只是為瞬間瞭解（頓）數學而準備，逐漸學習只是過程或手段，瞬間瞭解才是目標或終極目的。

「望、聞、問、切」是自診與診斷他人數學智慧高低的方法；而傳統的「傳道、授業、解惑」則是一般老師在課堂上傳授數學知識的方式。如何將診斷方法與教授方式相結合，不離文字（語）與不著文字（默）交錯應用，漸學與頓解互相融合，是領悟數學與教人

數學的精髓之所在。

18.1 歐基理得的《幾何原本》…不離文字的數學啟蒙書

歐基理得企圖讓抽象、對很多人來說，難以理解的數學，透過文字來理解。他利用文字下定義，給原理所寫成的《幾何原本》，就是希望以文字來理解數學。雖然理解是一種領悟，而不是文字，兩者之間存有很大隔閡，但是歐基理得的努力，使《幾何原本》的說教方式成為後來數學啟蒙教育的一個範本。當代數學教科書都以不離文字這樣的方式來理解跟學習數學。即使是歐氏的教學方式，隨著時代的演變，也有很大的改變，就以「畢氏定理（商高定理）」的證明為例，記得就讀國中時，課本的證明就是採《幾何原本》巧添的輔助線來論證的。



▲ 原本上的畢氏定理證明圖

〔證〕因為 $\Delta ABE \cong \Delta ZBC(SAS)$，又 ΔABE 的面積是 $\square BENM$ 面積的一半，ΔZBC 的面積是 $\square BZHA$ 面積的一半，所以 $\square BENM$ 的面積等於 $\square BZHA$ 的面積。

同法可得，$\square CDNM$ 的面積等於 $\square CKQA$ 的面積。又因為

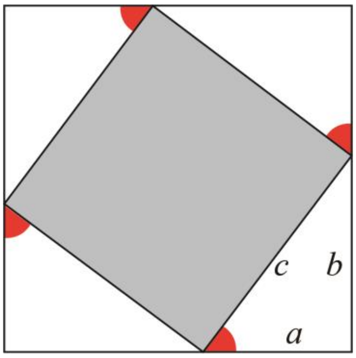
$$\square BCDE = \square BENM + \square CDNM,$$

所以

$$\square BCDE = \square BZHA + \square CKQA,$$

也就是說，$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$。

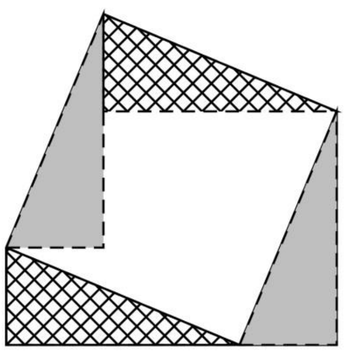
歐基理得的《幾何原本》就是讓文字磚塊，透過邏輯堆砌成為數學知識或數學智慧。這是一種不離文字（語）的漸進學習方式。截至目前為止，畢氏定理的證明多達四五百個之多，隨著思考的多元化與人類意識的增長，證明方式也產生了許許多多的不同。一個明顯的進展就是將文字語言與邏輯推理同步精鍊。如下圖是目前國中教科書所喜歡採用的證明方式：



$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot b \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

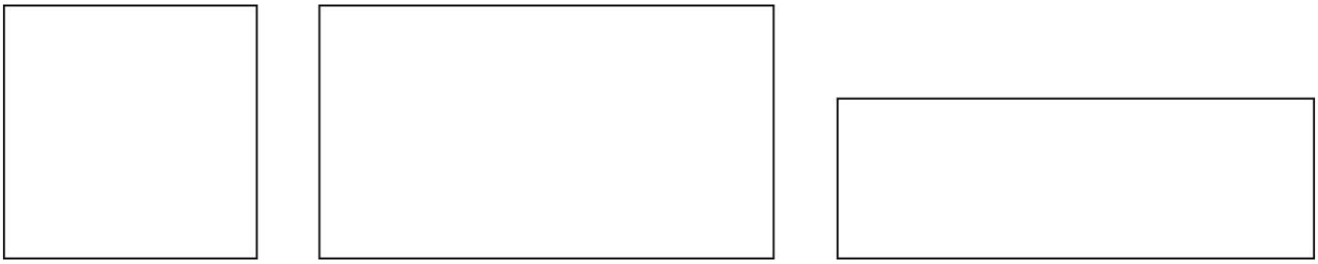
▲ 畢氏定理的精鍊證明

這道證明並沒有改變頭腦的思考行為，只是精緻化，換湯不換藥的做法。但頭腦的另一個功能便是直接領悟，瞬間產生智慧，這是不需透過文字這道工具或不立文字（默）的瞬間頓悟。畢氏定理的證明從著重文字與邏輯推理，進展到精鍊文字與推理，最後進入不需文字，很少推理的瞬間理解境界。例如，下圖是清朝梅文鼎送給畢氏定理的「無字證明」。



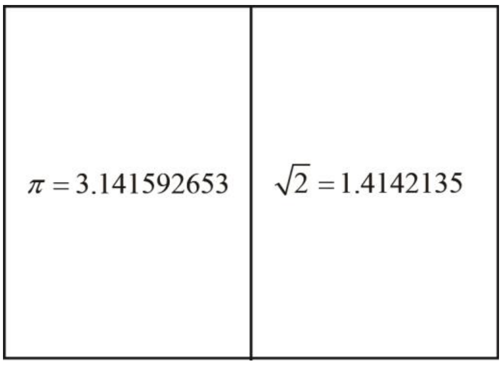
▲ 梅文鼎給〈勾股定理〉的無字證明

直接領悟與人的直覺能力相關，例如下列三種尺寸不一的矩形畫紙，你會欣賞哪一種：



用數學知識或實驗結果來說，長、寬比接近黃金比 1.618 的比例會讓人產生美感。例如沖洗的照片（3×5或4×6），敦煌壁畫，埃及的金字塔，希臘羅馬的神殿建築等，它們都符合黃金比。雖然它們符合黃金比原則，但是它們的誕生是出自人類理性資料比例的視覺美感，並非先有黃金比，再去創造它們。所以這些優美的建築，漂亮的繪畫，天籟之音都是出自直接領悟而來，並非書本教導或練習產生的。

練習 1　出版社為了美觀及作業方便，希望他們出版的書本，攤開時（如下圖所示）整體的長寬比例與書本合起來時的整頁長寬比例一樣。



▲ 書本攤開的樣式

(1) 試問該出版社使用紙張的長寬比是多少？

(2) 該出版社想出袖珍本書籍，將現成的整頁紙張切割成兩等張，並以此小張的紙當一頁。試問袖珍本書籍攤開的長寬比例與小張的長寬比例一樣嗎？

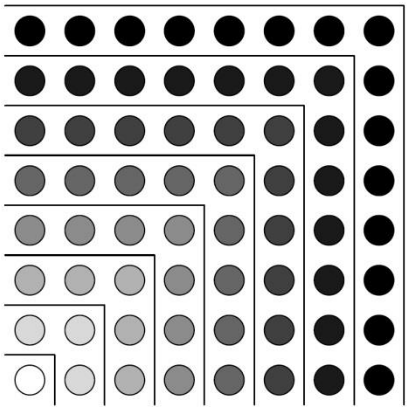
18.2 《無字證明》…不立文字的數學真理

文字只是進入數學真理的敲門磚，橋樑，仲介或溝通工具。不需透過文字的詮釋，我們

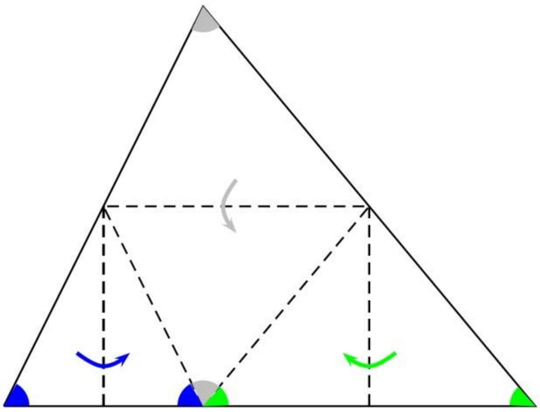
依然可以瞭解數學真理，無字證明就是明顯的例子。R. B. Nelsen 寫過兩本 Proof Without Words《無字證明》的書，他透過簡易，巧思的圖形詮釋中學的許多數學公式，最重要的一點就是沒有任何文字說明在裡頭。簡而言之，無字證明就是利用已知的規律來傳遞尚未整理的真理。

例如，下圖中的右圖正方形內的黑圓圈用角形線“┐”做分類，離左下角越近的圓圈顏色越淡。這樣整理過的圓圈總數就替左圖的數學式子$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$傳達了真理。

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$



練習 2 下圖是將任意三角形摺三次的示意圖，你能指出它在傳達三角形的那個幾何性質嗎？

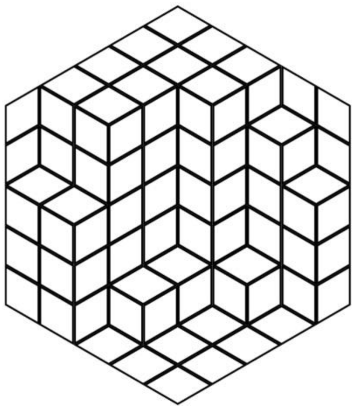


▲ 三角形摺三次示意圖

當你拿蘋果告訴嬰兒說「這是蘋果」，待會教起顏色來時，又不小心的拿起蘋果說「這是紅色」。嬰兒肯定心裡納悶著「這個東東到底是蘋果，還是紅色」。這說明了，語言文字只是一種仲介，溝通橋樑，隨時有可能產生誤解。無字證明就是想擺脫這種傳教方式，

利用頭腦具有頓解的能力，以及巧妙與特殊安排的圖形，讓人可以不著文字的理解數學，得到智慧。「蘋果」與「紅色」還算容易用語言傳達的名詞，如果是教嬰兒「認識月亮」，不知你該如何是好？這是有名的「指月公案」。我們不可能像拿蘋果一樣，把月亮摘下，拿來講解給嬰兒聽，但是可以透過指頭的指引，引領嬰兒理解月亮。但這樣也有風險，究竟是手指頭，指月的姿勢，天空或者所指的物體才是月亮呢？對初學的嬰兒來說，他可能搞不清楚。但可以確認的一點是，手指雖不是月亮，但他可以引領嬰兒認識月亮，當認識月亮後，手指的功能就消失了。這裡的無字證明就是巧設很多圖形，讓它扮演手指的功能，希望你從中領悟數學智慧。所以，無字證明可以說是數學的指月公案。

接下來要談的例子需要一點空間的想像能力。如下圖所示：它是一個邊長 5 的正六邊形餐盒，在餐盒擺滿同一形狀的菱形小點心，為了不留下任何空隙，不難發現，菱形小點心有三種不同的擺設角度（每個菱形小點心的較短對角線需與正六邊形餐盒的某兩邊平行）。

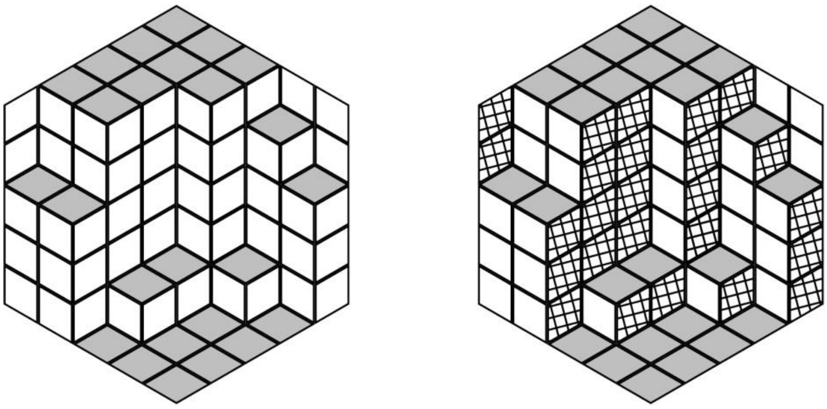


問題是「這三種不同方向的菱形小點心個數會一樣多嗎？如何覓得方法詮釋它呢？」就以上圖來說，每個方向的菱形小點心個數都是 25 個，不多也不少。這是特例，還是常態呢？

記得小時候喝熱牛奶或咖啡時都要加方糖，不是現在的糖包。商人將小立方體的方糖用紙盒包裝成一整盒出售。當你慢慢使用掉盒裡的小方糖時，那一整盒方糖的形狀會是怎麼演變的呢？你能將菱形小點心擺放的正六邊形平面圖與小方糖立體圖相連結嗎？

為了進一步的瞭解，把三種不同方向的菱形小點心製作成不同花紋，第一種是「星空的黑色」，第二種是「鐵窗的網線」，第三種則是「純潔的白色」。此時，盤裡的顏色就變

成下圖的樣子，不覺得挺有立體感的嗎？



如果將上圖想成小方糖堆砌起來的立體圖形，那麼「星空的黑色」代表從上空鳥瞰的景色；「鐵窗的網線」代表從右邊審視的圖案；「純潔的白色」代表從左邊觀賞的景觀。每一種都應該有

$$5\times5=25$$

塊才是。不知你領悟了嗎？

練習 3 考慮下列兩道問題：

(1) 求邊長為 n 的正六邊形面積。

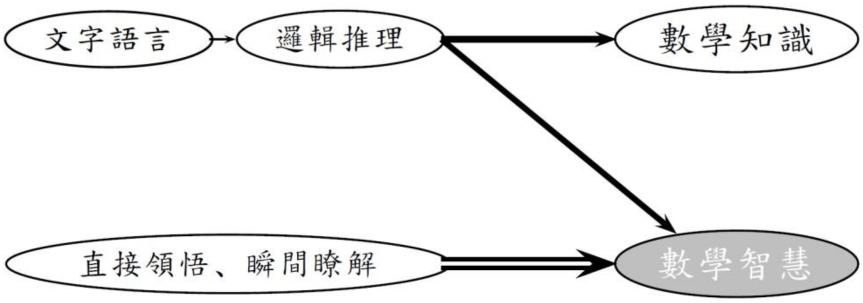
(2) 邊長為 n 的正六邊形餐盒最多可以擺入多少塊菱形小點心。

當你再認真從上空鳥瞰這立體圖形，將發現產生 7 塊高、低不一的「黑色梯田」，也就是在 5×5 的正方形區域內，因為高低、起伏不一的關係，造成了 7 塊不相連的梯田。當你從左邊或右邊觀賞時，你也會發現「網線梯田」與「白色梯田」也都是 7 塊。這是巧合或是天意呢？留給讀者思索吧！

18.3 無字證明的“無字”兩字也是文字

不離文字就是「利用文字當敲門磚，透過邏輯思維堆砌成數學智慧，在得到數學智慧後，就忘掉文字，遠離文字」，如果無法過河拆橋，忘掉文字，遠離文字，那你堆砌而成的不是數學智慧，只是數學知識而已。然而，不立文字卻是「在瞬間頓解數學智慧後，儘

一切可能，將數學智慧整理成可以傳續、教授的記載或任何其它形式」。所以「不離文字」與「不立文字」形式雖相反，實際上是相通的，互補的。它們都在使用頭腦的兩種功能…漸解與頓悟，其流程圖如下：



知識是未經消化的智慧，而智慧是反芻過的知識。知識是一種記憶，會隨時間而淡忘，又它是透過文字與邏輯的建構儲存在頭腦裡，所以日積月累之下，頭腦總會有不勝負荷的時候。然而智慧就像隨身攜帶著火把一樣，走到哪裡，它就照亮那裡，摸索跟記憶是不需要的東西。

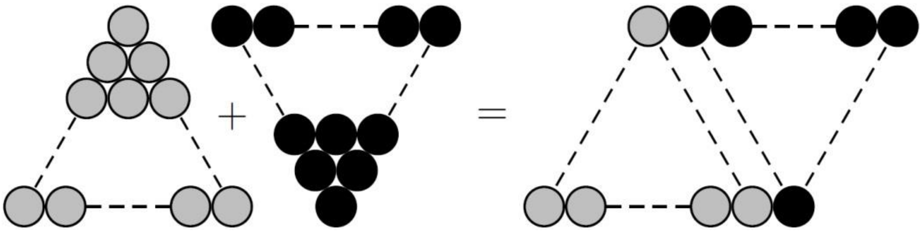
累積太多未消化的知識就如同說謊一樣，起先撒個小謊，漸漸的必須說個中謊才能掩飾那小謊，最後撒個瞞天大謊才能在邏輯上包容前面所有的謊言。太多知識儲存在頭腦裡，必須經常利用語言與邏輯整理那日漸龐大的記憶知識，由於腦容量的限制，走向崩潰是必然的。所以將知識消化並反芻成智慧，是解決問題的根本。

18.4 語、默有分與頓、漸有別

默（不立文字）就是認為“數學是說不得的”，採取的方法，有「棒喝」或「無字證明」；而語（不離文字）就是要把“說不得的數學如何說”，採取的方法，有「直說」,「巧說」與「機鋒說」。

使用引導或數學公案的「直說」：老師在課堂上課，數學課本的教授都是屬於帶有引導或示範意味的「直說」。使用數學公案的「直說」有大家最熟悉的如下幾個例子：

① 高斯求$1+2+3+\cdots+100=5050$的等差求和技巧：

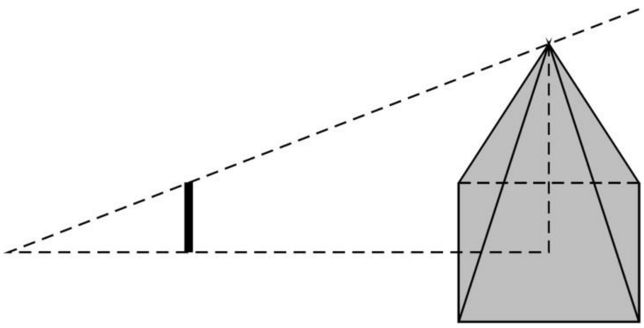


▲ 高斯$1+2+3+\cdots+100=5050$公案

高斯的這則公案不僅揭開「等差、等比級數求和教學」的序幕，也有如下的引申：將看似不可求的式子，透過模型的重新解釋及合併成熟悉的面孔，可以快速得到答案。例如，前面畢氏定理的證明中，將四塊相同的直角三角形，排列成一個內側邊長c的小正方形，外側邊長$a+b$的大正方形，透過大正方形面積與小正方形及四塊直角三角形面積和一樣的原理，得到畢氏定理。

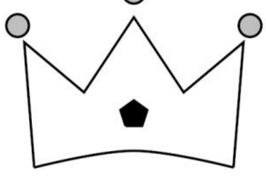
高斯數學公案給我們的啟示是:「當我們可以將繁雜的式子或圖形拼湊成有序的式子或易解的圖形時，透過兩種不同的算法，數學奧秘就會現形」。

② 泰樂斯量金字塔高度所用的幾何相似：



▲ 泰樂斯量金字塔公案

③ 阿基米德的「洗澡公案」： 阿基米德跳出浴缸，大喊「找到了」，幫國王解決王冠是否純金打造的謎題。

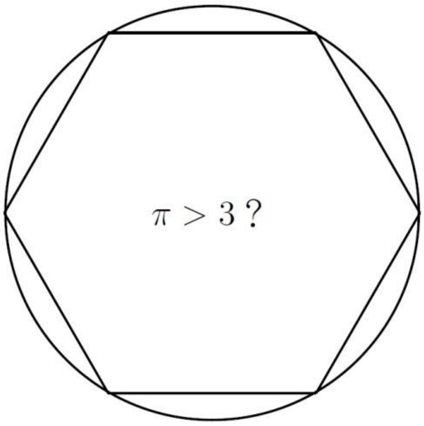


$$密度=\frac{重量}{體積}$$

▲ 阿基米德的王冠公案

④ 劉徽、祖沖之或阿基米德求圓周率π的方法：

大家都知道「圓周率π是無理數」這一數學知識，但是它的教學該如何從小學鋪陳，漸進推衍到中學呢？那將是很困難的問題。日本曾經討論過「小學階段，圓周率π用 3 或 3.14 比較好？」這議題。新加坡很特別，直接使用有理數$\frac{22}{7}$來表示π，這是阿基米德的估計，也是祖沖之的「疏率」。無論是 3 或者$\frac{22}{7}$代表圓周率π，他們都在使用祖沖之或阿基米德求圓周率π的數學公案。



劉徽割圓術：

割之彌細，所失彌少，

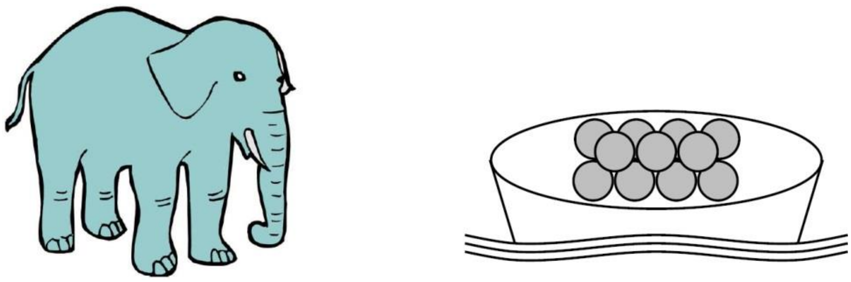
割之又割，以至於不可割，

則與圓周合體而無所失矣。

▲ 劉徽割圓術公案

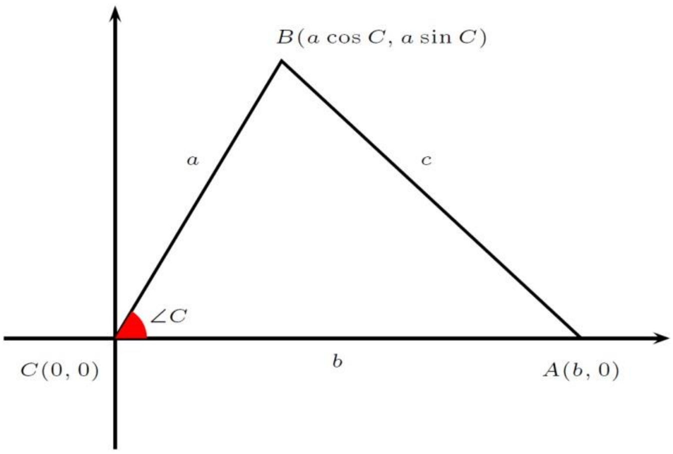
⑤ 曹沖量大象體重的方法：

聰明的曹沖幫父親曹操想出量大象體重的方法。曹沖借用船來轉換大象體重成為一大堆石頭的重量，成為傳頌千年的故事。



▲ 曹沖量大象體重公案

曹沖將大象放在船上，透過等重的小石頭量得大象體重，如果將三角形 ABC 架設在坐標平面上，讓 $C(0,0)$ 與原點重疊，$A(b,0)$ 在 x 軸上（如下圖所示），那麼會產生怎樣的結果呢？



▲ 架坐標證明餘弦定理

在這個架設下，因為 $\angle BCA = \angle C, BC = a$，所以 B 點坐標為 $(a\cos C, a\sin C)$。而 $AB = c$ ，但是 AB 也可以透過架設的坐標之兩點距離公式得到

$$AB = \sqrt{(a\cos C - b)^2 + (a\sin C - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

就得到有名的餘弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

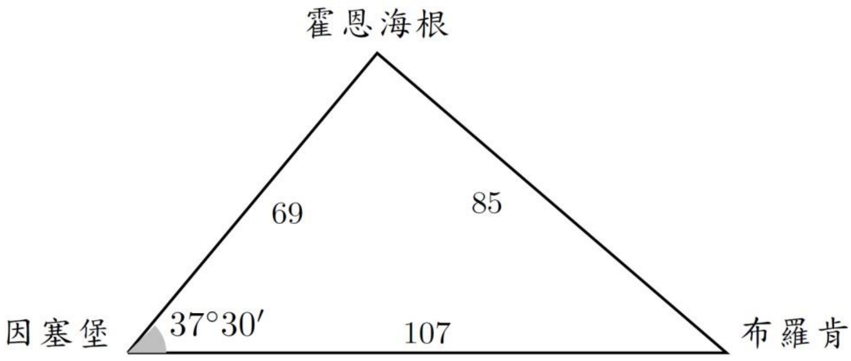
曹沖量大象體重不僅是一則故事，而且是一道數學公案，更可引申出微妙的共通智慧（把三角形比喻成大象，坐標視為船）。也就是說，數學公案的智慧不在故事的內容，內容終究還是由文字所包裝，他還是知識而已，必須瞭解故事的餘音所要傳遞的那種無聲的領悟。

⑥ 高斯檢驗三角形內角和是否為 180° 公案：

據傳說，數學大師高斯在 1820 年代後期，做了一項很奇特的實驗。他找了德國霍恩海根、布羅肯、因塞堡等三處山頂，將它們當做一個大三角形（其三邊長分別約是 69 公里、85 公里與 107 公里）的三個頂點。高斯測量了這三角形的三個內角大小，發現在實驗誤差範圍內，三內角加起來等於一百八十度。以結果而論，這個實驗並沒有任何新的發現，因為大家都在中學的幾何課裡學過「三內角和等於一百八十度」這個定理。但是以概念而言，高斯這個實驗超越他的時代很遠，因為他比任何人還

更早知道這個兩千多年來從未受質疑的「定理」並不必然成立：或許在極大的三角形中就可以看出三內角和並不恰好就是一百八十度。

高斯為什麼會想去檢驗依循邏輯嚴謹推導出來的定理呢？究竟問題出在哪裡？回顧平面幾何經典—歐幾里得所著《幾何原本》—中關於內角和定理的證明，其中最關鍵的一步是做一條補助線通過三角形其中一頂點，而且使補助線平行於頂點的對邊。問題正出在這條補助線是不是畫得出來！如果仔細檢討證明中的所有論證依據，補助線存在的根據主要來自《幾何原本》第一卷五個公設中的最後一個：如果一直線與另兩條直線相交，使得同一邊的兩內角和比180°小，這兩條直線會相交於內角和比180°小的那一側。



▲ 高斯三山公案

運用寓言或譬喻的「巧說」，是為了解決用語言文字描述數學與數學本質的隔閡，所創造出來的一套談數學的方法。在高斯與曹聰的數學公案中，他們都是「直說」中帶有「巧說」的方法。不使用文字，藉著裝腔作勢讓人瞭解事物就是一種巧說，所以前面所說的「指月公案」也算是巧說。如果把圖形排列的形式也視為文字的一種，那麼「無字證明」就不是不著文字，而是不離文字的巧說了（它拿恰當的圖形或形式當譬喻）。

採取有意誤導或自相矛盾的「機鋒說」，這是大學教授口試學生時最常使用的伎倆。學生接受口試時，常常答非所問，或者想錯方向，教授為了拉回正確的方向，刻意引導錯誤或問個很奇怪的問題，目的就是要讓學生快點知道方向有誤，迷途知返。使用不當，會變成忽視或嘲諷學生的問題，讓學生內心受創。

將三倍角公式「$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$」記頌為台語的「一元三角等於四元三角減去三元」是哪一說呢？這是「胡說」，它只是讓公式便於儲存在頭腦裡的一種記憶知識的捷徑。

無論是不著文字的「棒喝」、「無字證明」，或者是不離文字的「直說」、「巧說」與「機鋒說」，他們都想讓教學與學習做到：在老師的拈花之中，讓學生微笑的領悟智慧，達到意識的另一個提升；而非在老師的講笑話之中，學生捧腹大笑，暫解知識充填頭腦所帶來的痛苦。

數學知識與數學智慧最大的不同，在於知識可以傳播或傳遞，但智慧是在醞釀之下誕生的，它無法被傳播或傳遞（或者說，無法被寫成文字流傳）。例如，葡萄酒是葡萄經發酵，醞釀而成。一提到葡萄酒，大家都知道，它是葡萄製成的酒，這是知識，這是可以傳播與傳遞的知識，即使是不喝葡萄酒的人也知道這知識。但是，在不經提醒之下，讓人飲葡萄酒，能品嚐出它是由葡萄發酵，醞釀而成的人可就不多了。葡萄酒與葡萄是兩種看起來就不相像的東西，能連結它們的人必須是具有智慧的人。「喝了葡萄酒馬上領悟出它是葡萄製成的」是一種智慧；「葡萄酒是葡萄製成的」是死的知識。

18.5 知識與穎智

一個教授買了一個水果罐頭，但是他打不開那個罐頭，他不知道如何打開它，所以他跑到書房去上網，查閱烹飪的書，等到他查好了書，找出在哪一頁，以及它的參考資料，然後很快地跑回來，準備去打開那個罐頭，他那不識字的僕人已經將它打開了。

他問：“妳是怎麼打開的？”

那個僕人回答說：“教授，當你無法閱讀的時候，你就必須用你的頭腦。”

不離文字與不立文字⋯語、默有分，頓、漸有別的練習題解答

練習 1

(1) 設紙張的長與寬分別為 x 與 y，攤開的長寬比 $\frac{2x}{y}$，單頁的長寬比 $\frac{y}{x}$。由題意得

$$\frac{2x}{y}=\frac{y}{x}\Rightarrow\left(\frac{y}{x}\right)^2=2.$$

所以出版社使用紙張之長寬比為 $\sqrt{2}$。

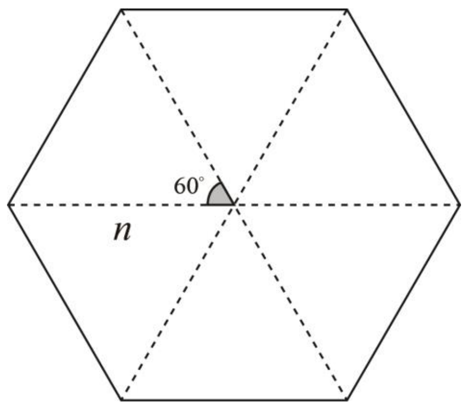
(2) 一樣。

練習 2

三角形三內角和等於 180°。

練習 3

(1) 如下圖所示：



邊長為 n 的正六邊形面積為

$$6\cdot\frac{1}{2}n\cdot n\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}n^2.$$

(2) 因為每塊菱形小點心是由兩塊邊長 1 的正三角形拼成，所以每塊菱形小點心的面積為

$$2\cdot\frac{1}{2}1\cdot 1\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此邊長為 n 的正六邊形餐盒最多可以擺入

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}n^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3n^2$$

塊菱形小點心。