20 亞里斯多德症候群

我有一位學長，當了一年實習老師之後，就辭掉教職，自己經營數學家教班，並取得合法立案的執照。因為是個體戶的緣故，一年到頭難得放假休息，常常趁暑假結束，開學前這個空檔出國旅行。有幾年，他請我在他出國期間，客串幫他的學生上點數學課程。我大都挑些活潑有趣的應用問題來教，有一次，上完課後，一位白衣、黑裙、紅書包的學生問了我這樣的問題：「要如何學好數學證明題？」會問這樣深度的問題肯定是出自名校的好學生，我就快速的回想一下「從以前到現在，我是如何進行數學證明的學習」，並慎重的回答說：「課本的證明題很重要，雖然第一次學習可能是用背的或者是記憶（臨摹）的方法學習它的數學證明，但是第二次以後可能就可以用理解的方式瞭解解其證明過程及為什麼要這樣證。聯考最多只是考類似的證明題目（仿冒），只要課本的證明題及證明方法都熟悉了，其實不難可以有結構的寫下證明題的證明過程。一般的證明題可粗分成計算式證明題與推理式證明題，計算式證明題就是套用數學公式驗算要妳證明的式子是否成立，說穿了，就是在做一道計算題而已，而推理式證明題比較複雜。推理式證明題牽涉到比較複雜的邏輯推理，究竟是採取直接證法或間接證法，而間接證法又可分為反證法或歸謬證法。總之，對不熟悉邏輯演繹體系的學生來說，要同時兼顧數學層面與選擇正確的邏輯方法是相當不容易的一件事。」這就是我回答那位學生的大致內容。

題目：若實數$a\ge 1, b\ge 1$，則證明

$$ab-a-b+1\ge 0.$$

其實，我不是很滿意這樣的回答。原因是，有關何時選擇直接證法，何時採取間接證法，甚至是使用反證法或利用歸謬證法的時機與區別，我並沒有回答。而這正是最困難回答的部份，因為它們是一種沒辦法用言語描述，只能靠內心體會的判斷。學習數學證明就

像學習寫書法或畫山水畫一樣，必須從臨摹，進化到仿冒，最後走出自己的風格與創意。即使是被譽為東方畢卡索的張大千，也是臨摹了無數的敦煌壁畫，仿冒了許多古人的作品，才成為繪畫大師的。書法與繪畫的學習如此，數學證明的學習也是這樣。

我對這樣的答覆不滿意的另一個原因，是怕那位學生罹患一種叫「亞里斯多德症候群」的數學疾病。

20.1 不是這個就是那個，要選擇，要區分，要判斷的亞里斯多德邏輯演繹

談到邏輯就讓人想起兩千多年前的亞里斯多德。在西方，古希臘的亞里斯多德被認為是邏輯之父，也是古代哲學泰斗。歐幾理得的《幾何原本》就是運用了亞里斯多德的邏輯方法，按照公理化結構，所建立起來的第一個完整的關於幾何學的演繹知識體系。《幾何原本》的這種邏輯推理與鋪陳方式，深深的影響著後來的數學教學與發展。原因無它，人的頭腦總是很容易接受「不是這個就是那個，要選擇，要區分，要判斷」的思考模式。事實上，「不是這個就是那個，要選擇，要區分，要判斷」也是亞里斯多德的口頭禪，也是他的邏輯體系之精髓。想想看，邏輯的“真假值表”就是在教你做選擇，做區分及做判斷，而最後的結果只會有兩元，不是對就是錯，不是這個就是那個，幾乎完全符合頭腦的思考模式。

直接證法

直接證法的邏輯演繹就是從敘述 P：「$a \ge 1, b \ge 1$」直接推得敘述 Q：「$ab-a-b+1 \ge 0$」成立的意思。其推理方式如下：

因為 $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$，又 $a-1 \ge 0, b-1 \ge 0$，所以

$$ab-a-b+1=(a-1)(b-1) \ge 0.$$

像這樣，直接利用敘述 P 證明敘述 Q 成立，即「P $\Rightarrow$Q」的證明模式就是直接證法。

亞里斯多德的邏輯演繹高峰發生在上世紀，也就是電腦的被發明與被廣泛應用之時。電腦的發明讓邏輯演繹大放異彩，也深深影響這整個世界。IBM 設計的深藍電腦，藉助

其強大的記憶與推演能力，擊敗史上最強的西洋棋王卡斯帕洛夫。棋藝（西洋棋，象棋，圍棋等）較量原本是一種陶冶心性的活動，當初的設計也顧慮到人類的腦容量。如今，電腦的不斷進步，每個人都成為沒有心靈活動的電腦之手下敗將，卻讓棋賽失去了昔日的樂趣與魅力。

間接證法（歸謬證法）

間接證法中的歸謬證法的邏輯演繹就是從敘述 Q：「$ab-a-b+1\geq 0$」的否定敘述−Q：「$ab-a-b+1<0$」出發，再加上敘述 P：「$a\geq 1, b\geq 1$」的部份結果「$a\geq 1$」，推得矛盾的事情。其推理方式如下：

假設敘述 Q：「$ab-a-b+1\geq 0$」不成立，即否定敘述−Q：「$ab-a-b+1<0$」成立。

因為$ab-a-b+1=(a-1)(b-1)<0$，又$a-1\geq 0$，所以

$$b-1<0.$$

這與「$b\geq 1$」矛盾。故敘述 Q：「$ab-a-b+1\geq 0$」應該要成立，得證。

像這樣，假設敘述Q的否定敘述−Q 成立，再利用敘述P的部份已知，推得矛盾的事情。因此，否定敘述−Q不可能成立，必須敘述Q成立。這樣的證明模式就是間接證法中的歸謬證法。

將邏輯演繹發揮到極致，是人類頭腦活動的一個高峰，但是過與不及都是不好的。不及代表頭腦缺乏推理能力與思考空間，過之則就像電腦一樣，缺乏什麼似的，沒有生趣，也容易陷入僵化，毫無彈性的迷思之中。

間接證法（反證法）

間接證法中的反證法的邏輯演繹就是從敘述 Q：「$ab-a-b+1\geq 0$」的否定敘述−Q：「$ab-a-b+1<0$」出發，推出與敘述 P：「$a\geq 1, b\geq 1$」矛盾的事情。其推理方式如下：

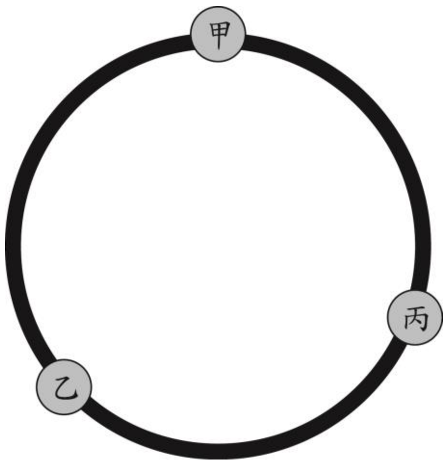
假設敘述 Q：「$ab-a-b+1\geq 0$」不成立，即否定敘述−Q：「$ab-a-b+1<0$」成立。

$$ab-a-b+1<0 \Rightarrow (a-1)(b-1)<0$$
$$\Rightarrow (a-1) \text{ 與 } (b-1) \text{必須一正，一負,}$$

而這與敘述 P：「$a \geq 1, b \geq 1$」的「$(a-1)$與$(b-1)$都不是負數」矛盾，故敘述 Q：「$ab-a-b+1 \geq 0$」應該要成立，得證。像這樣，假設敘述 Q 的否定敘述−Q 成立，推出與敘述 P 矛盾的事情。得到，否定敘述−Q 不可能成立，必須敘述 Q 成立。這樣的證明模式就是間接證法中的反證法。

不談如何選擇「直接證法」與「間接證法」，不區分與不判斷「歸謬證法」與「反證法」的差別，就是不想讓學生把證明這件事僵化掉，跳不出邏輯思考的泥淖裡。當做數學證明時，一開始就去想使用直接證法或間接證法，利用歸謬證法與反證法的邏輯演繹部份，而淡忘掉數學真理的傾訴，你就罹患了所有人都會患的「亞里斯多得症候群」這種通病。你就被頭腦牽著走，不是這個就是那個，要選擇，要區分，要判斷成為主角，數學真理變成配角。

練習 1　如下圖所示，在一個圓形的繞湖公路上分佈甲、乙、丙三個加油站。



已知三個加油站的儲油總量足以讓一輛汽車繞圓形公路一圈，求證汽車可以從某個加油站出發，帶著該加油站的汽油逆時針方向繞行一圈，回到原加油站。

20.2 既不是這個，也不是那個，不要選擇，不要區分，不要判斷的儈燦禪風

嚴格來說，罹患「亞里斯多得症候群」不算是生病，因為幾乎所有用腦過度的人都會生這種正常病。反倒是，不生這種正常病的人才是生病，這樣的人很稀少，而且得的是異常病，來自東方的僧燦就生了這種病。晚了亞里斯多德一千年才出生，不僅出生地相距很遠，連哲學思想也南轅北轍。僧燦以「既不是這個，也不是那個，不要選擇，不要區分，不要判斷」作為哲學思想，這與亞里斯多德重視頭腦邏輯演繹的思維幾乎相反。

說也奇怪，數學證明重視的是整個推理過程是否正確，選擇亞里斯多德的邏輯演繹作為出發點，應該是合乎常理的作法。但是，這樣會讓你的證明看起來缺少什麼似的，跟電腦給你冰冷的感覺一樣，難怪大部分的女生都不喜歡跟電腦打交道。把數學真理的證明強制性的用邏輯演繹來規範，就像你打造了上千把的鑰匙一樣，每當碰到一道門時，就想都不用想的拿起那一串廉價鑰匙，逐一嘗試，直到打開為止。但是，當有一道特殊的門，每把鑰匙都打不開它時，你會選擇放棄它。而僧燦的哲學可以彌補這樣的缺陷，數學證明就像隨身攜帶火把，思緒移動到哪，火炬就照亮哪，一切都是清楚明白的，邏輯演繹只是要把這清楚明白的道理說穿而已，並不是一開始就設想好怎樣的邏輯演繹。邏輯演繹是工具，橋樑，是配角，數學真理才是主角。

就以練習 1 的例子來說，你不可能一開始就設定好使用直接證法或間接證法，更不會想到要採取歸謬證法與反證法。只有隨著心思移動，證明它的邏輯演繹工具或說理工具才會自然浮現，不是這樣子嗎？

大家都臨摹過「質數有無窮多個」這道證明題的證明。如果沒有，那就太可惜了，先把它的證明臨摹一下吧！接著請你仿冒它來證明底下的問題：

練習 2　烏蘭數列 $\langle U_n \rangle$ 定義如下：當 $n=1,2$ 時，規定 $U_1=1, U_2=2$；當 $n>2$ 時，定義 U_n 為「大於 U_{n-1} 的數中，恰可表為兩個相異烏蘭數之和的最小數」。所以下一個烏蘭數為 $U_3=3$（僅能表成 $1+2$），再下個烏蘭數為 $U_4=4$（僅能表成 $1+3$）。但 5 就不是烏蘭數，原因為 $5=1+4=2+3$。

(1) 求U_5與U_6的值。

(2) 證明烏蘭數有無限多個。

20.3 緊張與放鬆的拿捏，沈重與輕盈的取捨…當數學深層的意義不被瞭解時，你就無法達到頭腦的平靜

每個人都有打過預防針或生病打針的時候，大部分的人也都有看過牙醫的經驗，有一個很小就養成，而且是很奇怪的行為願意在這裡跟讀者分享。每次打針或看牙醫時，我都會偷偷用手捏著大腿外側的一個地方，讓它疼痛。一直在想，這種行為的真正目的為何？是怕痛太過緊張嗎？還是想轉移到自己可以掌握的痛處，好讓頭腦分心，相對來說，這樣在打針處或牙床可以相對放鬆，容易治療嗎？這跟許多人考試時，猛抓頭髮以便轉移沈重緊張壓力，達到頭腦放鬆輕盈的目的是否一樣？運動選手經常在揮拍後，大吼一聲或嘴巴碎碎念，來達到釋放壓力，消除緊張的方式。從這些事情看來，沈重，緊張與壓力是容易在人的身體發生，但是想讓身心輕盈，放鬆與鬆弛卻很難辦到。

感冒的人畏寒居多，傳統中國想法就是要洗熱水澡，提高身體溫度，免得再次受寒；但是在法國，醫生卻會叫你沖個很冷的冷水澡，兩種方法顯然背道而馳，但目的可能是一致的。何以見得呢？就以睡眠來說，只有在極度放鬆的狀態下，一個人才可能真正進入夢鄉，睡著了。但是，每個人幾乎每天都會睡著，而讓自己睡著的方法卻有兩種：一種是翻來覆去，輾轉難眠之後才免為其難的睡著的，另一種是數綿羊或讓頭腦自然放鬆的情形下睡著的。前者大概是睡前頭腦想了些許事情，以致於無法放鬆下來，只好反其道而行，讓頭腦更緊張，直到極點，頭腦只好放鬆下來，於是睡著了，這有點像感冒洗熱水澡一樣；然而後者是可以自然控制，讓頭腦處於放鬆狀態，或者讓頭腦做點無聊的重複數數活動，這樣頭腦就不會轉移到別的事情上去，放鬆的進入夢鄉。在這種情形下，數綿羊只是一種竅門，讓頭腦無聊，又無法想其它事情的伎俩，並不是唯一的方法。這後者有點像沖冷水澡一樣，冷卻頭腦的運作。

無論是增加壓力，提高緊張或者是做些催眠的活動，讓身心輕盈，其目的都只有一個：

就是讓頭腦處於放鬆狀態。只有在頭腦放鬆狀態下，球才能打得好，睡覺才能深沈。頭腦放鬆跟數學的學習也有很大的相關。想想看，老師第一次將數學觀念，數學公式或數學定理傳授給你時，因為你的頭腦需要填塞了這些新的東西，而且一時之間肯定無法消化它們，吸收它們，所以你的頭腦會處於緊張狀態，感受到壓力沈重。頭腦是一個很奇怪的設計，每當不完美，不美麗，不完全或不完整的東西進入時，頭腦都會處於緊張，壓力沈重的狀態。但是，當你使他們完美，美麗，完全與完整時，也就是吸收他們，使他們成為你的血液或骨頭的一部份時，他們就從頭腦中卸下了，這就是所謂的「放鬆」。所以當老師再舉例說明或做一些相關的練習題之後，有些學生就解除了頭腦中的部份壓力與重擔，因為他們已經走在瞭解與放鬆的路上了。但是，也有些學生會感受到更沈重或壓力更大，這些是還沒辦法瞭解的學生。如果老師拿捏的不好的話，他們不僅無法享受到瞭解的放鬆，可能會走向另一端…放棄。

數學的學習可以用爬山來解釋,當你要攀爬一座高山時,你會先購買所需的用具與食物。開始登山時，雖然背著笨重的登山用具與食物，但是心情卻是愉快的，原因是頭腦還做一個可以成真的美夢。但是爬到中途時，笨重的裝備與體力的消耗會讓頭腦產生緊張與壓力，擔心這次登山是否可以完美的達成任務。這時的情況就像老師塞一大堆數學公式給你，而你只能狼吞虎嚥似的，暫時將他們寄放在頭腦裡，無形中頭腦就產生了壓力與沈重的負擔。如果你是一位善於登高山的人，你會逐漸的使用攜帶的用具與食物，好讓重量減輕,並放鬆心情的登上峰頂。但是,也有些人受不了這種壓力,放棄提早下山了。其實只有懂得放鬆頭腦，讓身體輕盈的人才可以登峰造極。但是，可以登峰造極的人，不一定可以安全返家，因為輕盈的人就是什麼都沒有，又要如何應付下山所需呢？當你上山時，使用過的工具被丟棄時，你的頭腦還有辦法放鬆，那就代表那個工具已經不是必需品了，即使下山時，需要用它，你也可以找到替代品，這就是放鬆的意義。所以登山是一種從笨重，緊張到放鬆，輕盈，最後還需要有信心的心路歷程。當你狼吞虎嚥的那些數學公式，還停留在頭腦裡，就代表那些公式的美與完整尚未被瞭解，壓力與緊張無時無刻會從頭腦裡冒出來；只有當放鬆的時刻來臨，這些公式才會融入你的血液與骨頭裡，從頭腦裡消失。也就是說，當數學深層的意義不被瞭解時，你就無法達到頭腦的

平靜，放鬆是讓頭腦平靜的不二法門。

放鬆可以穿越數學，經歷過數學，放棄只能繞過數學，逃避數學，繞過數學，逃避數學比穿越數學，經歷數學來得容易。放鬆，其實是更具彈性，掌握得更確實，更牢固；緊張，反而會寸步難行，甚至最後受不了導致放棄。患亞里斯多得症候群的人就是頭腦裡還存在著許多的壓力與緊張，因為他還惦記著到底該使用「直接證法」,「間接證法」,「歸謬證法」或「反證法」這些邏輯演繹。當這些還無時無刻干擾你的頭腦時，頭腦不可能平靜，惡夢自然會發生，放鬆是最好的方法。最後一句話

『智者努力做到能放鬆的忘掉所有公式與邏輯，而愚者卻緊張的想要綁住所有的公式與邏輯。智者講究輕盈與放鬆，而愚者追求緊張與沈重。』

20.4 隱藏的和諧比看得見的和諧來得好

有一天，亞里斯多德正在海邊沙灘上走路，他看到赫拉克利特正在用勺子從海裏舀水，然後把水倒在岸邊他挖的一個小洞裏。亞里斯多德也好奇了:「你在做什麼？」赫拉克利特說:「我要用整個大海的水來填滿這個洞。」亞里斯多德大笑起來說:「你真笨！這是不可能的！你簡直是瘋了，你在浪費你的生命！只要看看海有這麼大，你的洞這麼小…而且就用一把勺子，你想把大海都勺到這個洞裏去？你簡直是發瘋了！回家休息去吧。」赫拉克利特笑得比亞里斯多德還響，他說:「是的，我會走的，因為我的工作做完了。」亞里斯多德問:「你這是什麼意思？」赫拉克利特說:「你做的也一樣…甚至更傻。看看你的頭腦，它比我的洞還小。再看看知識，它比這海洋還大。再看看你的思考…它們比我的勺子更大嗎？」赫拉克利特走了，大笑著走了。

亞里斯多德症候群的練習題解答

練習 1

因為三個加油站的儲油總量足以讓一輛汽車繞圓形公路一圈，所以至少有一個加油站的儲油足以讓一輛汽車以逆時針方向跑到下一個加油站，不妨令這個加油站為甲加油站。因為汽車只要能到達甲加油站，就能帶著甲加油站的油到達乙加油站，所以甲、乙兩個加油站的油是可以算在一起的，即可以將他們合併成一個加油站，以甲加油站代表。原題成為合併後的甲加油站與丙加油站的油可以繞一圈，那代表某加油站的油足以跑到下一個加油站，假設是丙加油站。故從丙加油站出發，可以跑到甲加油站，再帶甲加油站的油跑到乙加油站，最後取乙加油站的油。因為總儲油足以讓一輛汽車跑一圈，所以可以回到丙加油了。

練習 2

(1) $U_5 = 6 = 2+4, U_6 = 8 = 2 = 6$。

(2) 設烏蘭數僅有有限個，並令其為$U_1, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1}, U_n$，也就是說，$U_n$是最大的烏蘭數。

令$U = U_{n-1} + U_n$，因為$U = U_{n-1} + U_n > U_n$，所以U不是烏蘭數。根據烏蘭數的定義，U至少還可以表成另一組烏蘭數的和，令$U = U_a + U_b (a < b)$。

① 當$a = n-1$時，因為$U_a = U_{n-1}$，所以$U_b = U_n$，即$b = n$。此與假設不合。

② 當$a = n$時，因為$U_b > U_a = U_n$，所以最大的烏蘭數U_n比烏蘭數U_b小，矛盾。

由①、②知道，$U_a < U_{n-1}$，又最大的烏蘭數$U_n \geq U_b$，所以$U = U_{n-1} + U_n > U_a + U_b$，矛盾。故烏蘭數有無限多個。