圍貓遊戲…心理學家的遊戲

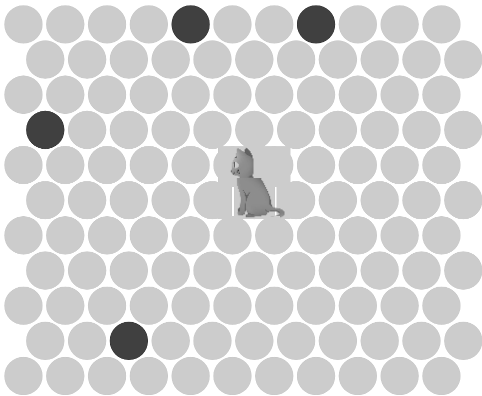
運籌於帷幄之中，以空間換取時間，決勝於千里之外。

玩電腦上的遊戲到底利多還是弊多？我教過一位女大學生，高中時因愛玩電玩遊戲「楓之谷」，高一、高二多是資優班倒數，高三才發憤圖強，順利考上公費生；讀博士班時，我的室友每天都玩電腦上的遊戲，沉溺到連指導教授都經常來關切；最近，樓下的鄰居說：「他兒子最近被電玩遊戲迷住了，連補習都不想去上。」諸如此類的情形，在中學或大學應該是很普遍的現象。我孩子就讀的小學，有一間超過百坪大的教室，裡面擺滿兩三百種益智小遊戲，坊間看得到的都在裡面，而且每位小朋友每學期都要上六次「數學探索」的課程，其實就是在探索那些益智遊戲。我當了一學年的數探志工，覺得這課程還不錯。究竟沉溺於電玩遊戲跟玩益智小遊戲要如何區別呢？我們可以慎選出具有啟發或啟蒙意義，又不會讓小孩沉溺於其中的遊戲嗎？

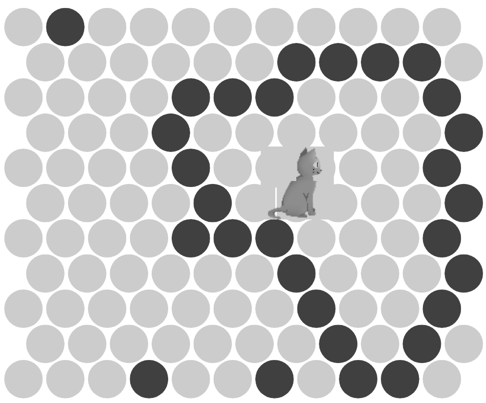
最近，心理學家發現，休閒放鬆類的簡單小遊戲才能提高快樂感，達到減壓效果。據美國媒體報導，美國俄亥俄州立大學傳播和心理學教授布拉德•布希曼等人招募了一些志願者玩不同種類的遊戲，研究人員清楚地發現，那些玩休閒小遊戲的人自我感覺更舒服、更快樂，能體驗到較多的正面情緒；而玩暴力遊戲的人則攻擊性和侵略性增強。此外，玩了一會兒休閒小遊戲，比如和小動物互動之後，人們會變得更親切，更願意主動幫助他人。希望本章所要介紹的遊戲，也是心理學家們發明的「圍貓遊戲」可以達到這個效果，甚至超過這個功能，達到啟蒙的意義。

圍貓遊戲是心理學家所設計出來的一道數學遊戲，遊戲背景是平面上放置許多排列整齊的圓圈，一隻貓位於正中央的圓圈上，而有少許的圓圈是黑色。這是一場圍貓者與貓的鬥智遊戲，圍貓者每次可以點選一個圓圈讓它變成黑色，而貓每次必須移動到鄰近還尚未變成黑色的圓圈上。當貓被黑色圓圈圍住時，貓就被捉擒了，但若貓跑出所有的圓圈外，則圍貓失敗。

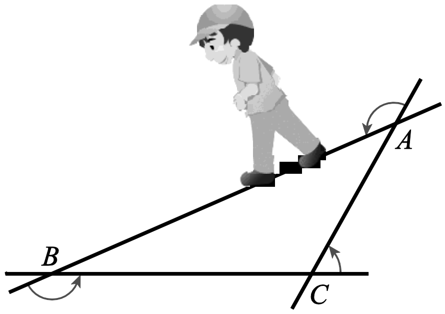
這遊戲是心理學家發明的，心理學家把貓視為需要接受輔導的對象（如叛逆的學生），而圍貓的人是輔導人員（如學校的導師），而黑色圓圈是貓的朋友，輔導人員或學校導師必須透過這些朋友的幫忙，將貓咪圍起來才算輔導成功。



日本 Game Design 團體將圍貓遊戲數位化，寫成 Flash 的版本，讓圍貓遊戲成為線上遊戲的一種，各位可以在網路上用「圍貓遊戲」四個字搜尋，就能在線上玩圍貓遊戲了。這遊戲除了好玩之外，還可以測試玩者的決策能力。在布滿圓形的長方形棋盤上，每個圓形都與六個圓形相連，一隻貓立於棋盤中央的圓形內，玩者每次點選一個圓形塗黑來圍堵貓，但貓可以往尚未被塗色的隔壁圓形移動。究竟鹿死誰手，就要看 Game Design 的設計功力與圍貓者的技巧誰強了，下圖是貓被圍住的一種情形：



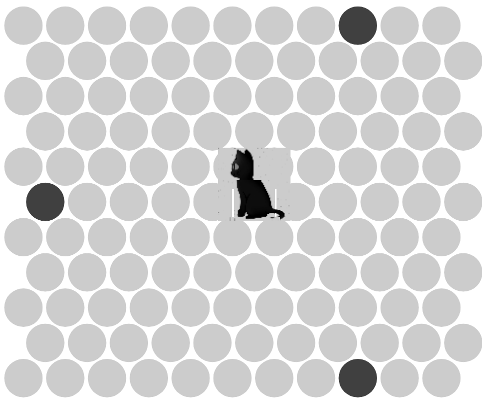
用堵貓的方法進行圍貓遊戲，經常沒辦法成功，主要是因為貓有六個方向可以逃竄，圍堵方法很難奏效。那麼圍貓遊戲是一種純靠運氣的遊戲嗎？應該也不是，我們可以往數學層面來思考。在進入更深入的討論之前，回想一下國中時「任一三角形 ABC 的內角和剛好等於$180°$」是如何證明的。讓小朋友站在 A 點、朝向 B 點、往 B 點走去，當走到 B 點時、原地旋轉、轉到臉朝 C 點的方向、接著往 C 點走去，又當走到 A 點時、並原地旋轉、轉到臉朝 B 點的方向，停了下來。此時，小朋友回到出發前的 A 點，且臉部朝向的方向相同（都朝向 B 點），這告訴我們「小朋友一共轉了完整的一圈，即$360°$的意思。」另外我們在三角形 A,B 及 C 三個頂點上分別畫出旋轉的角度，會發現他們都是外角。



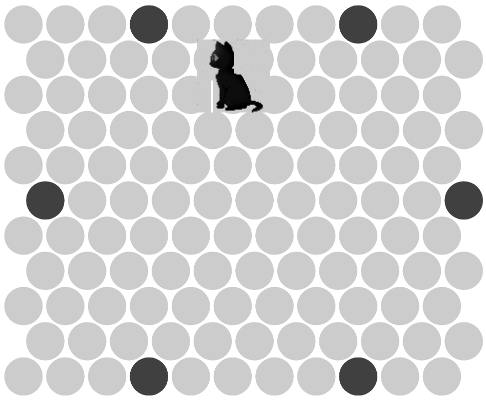
因為 A,B 及 C 每點都是由一對內角及一對外角構成，所以三角形的內角和就是

$$\frac{3\times 360^\circ - 2\times 360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

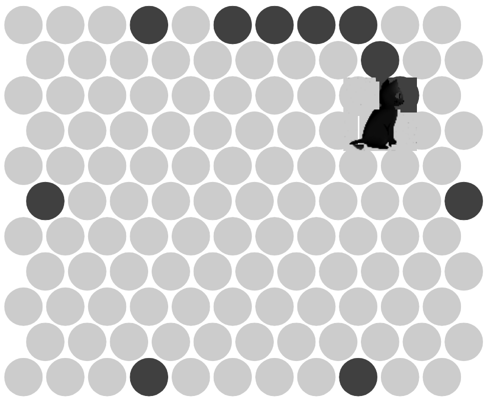
證明三角形內角和等於180°的概念真的對圍貓遊戲有所幫忙或者啟發嗎？且讓我們深入一點來探討圍貓遊戲吧！圍貓棋盤上，貓有六個方向可以逃竄，用堵貓的方式圍貓肯定很難奏效，貓移動速度過快，無法圍住。所以利用空間爭取時間是個不錯的圍法，但究竟要離貓多遠的地方開始圍起呢？這可能要根據貓有多少朋友，這些黑色圓圈如何分布來決定了。又以何種形狀來圍住貓呢？是圓形、三角形、長方形或者還有其他各種不同的形狀呢？因為貓有六個方位可以逃，所以用六邊形來圍貓是個不錯的想法。舉例來說，在下圖中，貓僅有三位朋友，照理說圍住貓很難，但是可以先想辦法幫貓製造比較多的朋友。



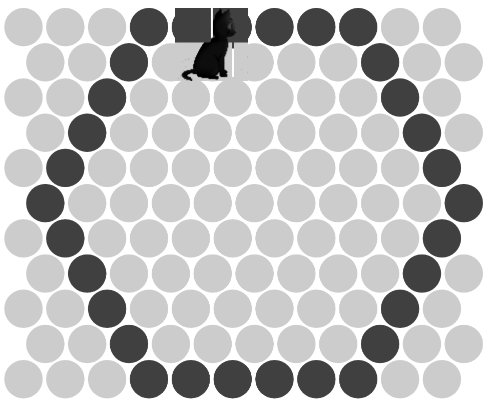
在下圖中，幫貓找到了三位朋友，讓六位朋友位於凸六邊形的六個頂點上，但我們也要付出讓貓移動三步的代價，還好此時貓還沒跑出六邊形外，代表還有機會圍貓成功。



從上圖可以洞悉，貓想要往北邊逃竄，當務之急當然是把北邊守住，然後牽引貓順著六邊形的邊移動，在碰到頂點時，帶著貓轉彎，如下圖所示：



繼續牽引貓順著六邊形的邊移動，在碰到頂點時，帶著貓轉彎，在經歷六個轉彎之後，貓就會發現「牠已被困在六邊形內了」。



總結我們的作法是「利用空間換取時間，先選妥適當大小的凸六邊形，最好這凸六邊形的六個頂點中，有愈多是黑色圓圈愈好（代表儘量用貓的朋友當頂點），然後點選剩下的非黑色圓圈，構築完成圍貓的六邊形。當貓衝撞這六邊形的一邊時，牽引貓順著邊移動，遇到頂點時帶著貓轉彎，在經歷六個轉彎之

後，貓就被困在凸六邊形內，大功告成。」手癢的讀者可以在線上試玩看看。圍貓遊戲是一道老少咸宜，不分男女，都很喜歡玩的遊戲，也是心理學家闡述「何謂輔導」的遊戲。

把圍貓遊戲視為一道數學問題，我們從混沌的實際操作過程裡得到圍貓的精髓，這整個過程就是數學孕育與思考的過程。數學家亨利・龐加萊在《數學的創造》中，將自己對數學的思考分為三個階段—準備、孕育與驗證。首先，所謂的準備階段就是對問題下很大功夫，又深陷混亂的階段；在這個階段，人們都會採取觀察、實作、分析、學習與內化等有意識的策略。其次，孕育階段就是停止有意識的思考，讓潛意識發酵，當腦袋裡的小燈泡忽然被點亮，那個「恍然大悟」的時刻就會到來。最後，驗證階段也是收割階段，這一階段只是寫下所有的事情、檢查細節、進行組織並發表。龐加萊特別強調孕育階段的潛意識角色，這是最難懂也是至為關鍵的階段。

談到潛意識就讓我們聯想到作夢，而談到作夢又讓我們想到佛洛伊德在 1900 年出版的《夢的解析》這本書。在佛洛伊德出版《夢的解析》之前，人類常把所作的夢當成神諭或預告未來即將發生的事件看待。上個世紀初期，當印度數學家拉馬奴姜在英國留學時，他的老師哈代就常常好奇的問說:「你每天早上一起床，就寫下這麼多的恆等式，到底是如何發生的？」拉馬奴姜總是說「那些是昨晚神明託夢給我的。」例如：

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}};$$

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}};$$

$$\sqrt[3]{\sec 40^\circ}+\sqrt[3]{\sec 80^\circ}-\sqrt[3]{\sec 20^\circ}=\sqrt[3]{6\left(\sqrt[3]{9}-1\right)}.$$

拉馬奴姜顯然是個等式達人，也是將龐加萊孕育階段中的潛意識發揮到淋漓盡致的人。

最後，把圍貓遊戲當成小孩子數學思考的學習單，觀察不同孩子經歷準備、孕育與驗證階段的發展過程是個不錯的主題。當然，小孩迷失方向時，老師應該適時介入給予該有的幫忙，但切忌將答案傳遞給他。

附錄

101 學年度全國高中數學科能力競賽決賽在彰師大數學系舉行，其中的筆

試試題(一)第二題就是證明拉馬奴姜的恆等式

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}.$$

在五十位考生中只有一位作對，而且是位高二的女生，以下是羅啟心這位女學生的作法：

設

$$S=\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}+\sqrt[3]{\cos 160^\circ},$$

則

$$\begin{aligned} S^3 &= \cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ \\ &\quad +3\left(\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}+\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}\right)S \\ &\quad -3\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}. \end{aligned}$$

利用三倍角公式可知 $\cos 40^\circ, \cos 80^\circ, \cos 160^\circ$ 為

$$4x^3-3x=-\frac{1}{2}$$

的三個根，再由根與係數的關係知道

$$\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ=0;$$

$$\cos 40^\circ\cos 80^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ+\cos 40^\circ\cos 160^\circ=-\frac{3}{4};$$

$$\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ=-\frac{1}{8}.$$

由第一及第二式知

$$S^3=3\left(\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}+\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}\right)S+\frac{3}{2}.$$

現在令

$$T=\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}+\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ},$$

則

$$S^3=3TS+\frac{3}{2}.$$

又

$$
\begin{aligned}
T^3 &= \cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \cos 40^\circ \cos 160^\circ \\
&\quad + 3T\left(\sqrt[3]{\cos^2 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos^2 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos^2 160^\circ}\right) \\
&\quad - 3\sqrt[3]{\cos^2 40^\circ}\sqrt[3]{\cos^2 80^\circ}\sqrt[3]{\cos^2 160^\circ} \\
&= -\frac{3}{4} + 3T\left(-\frac{1}{2}\right)S - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{3}{2}TS - \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

綜合兩式，得

$$T^3 + \frac{1}{2}S^3 = -\frac{3}{4}.$$

將此式代入 $S^3 = 3TS + \frac{3}{2}$ ，得

$$\left(S^3 - \frac{3}{2}\right)^3 = \left(3ST\right)^3 = 27S^3\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}S^3\right),$$

展開整理，得

$$S^9 + 9S^6 + 27S^3 - \frac{27}{8} = 0,$$

再配方，得

$$\left(S^3 + 3\right)^3 = \frac{27}{8} + 27 = 27 \cdot \frac{9}{8},$$

解得

$$S^3 + 3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}, \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\omega \text{ 或 } \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\omega^2,$$

即

$$S^3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3, \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\omega - 3 \text{ 或 } \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\omega^2 - 3.$$

因為 S 為實數，所以 S^3 也是實數，因此

$$S^3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3,$$

解得

$$S=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}}{2}-3},$$

即

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-2\right)},$$

得證。