象棋棋盤上的數學遊戲…老馬識途

半張棋盤上的 45 顆棋子騰空躍起，一匹馬以敏捷的馬步迅速地將它們串連成了一條直線，避免所有棋子散落一地。

在 1783 年，晚餐後，尤拉一邊喝著茶一邊和小孫女玩耍，突然之間，煙斗從他手中掉了下來。他說了一聲：「我的煙斗」，並彎腰去撿，結果再也沒有站起來，他抱著頭說了一句：「我死了」，尤拉停止了生命和計算。尤拉是數學史上最多產的數學家，現在常用的數學符號很多都是尤拉所發明的，例如：函數符號 $f(x)$，圓周率 π，自然對數的底 e，$\log x$，$\sin x$，$\cos x$ 以及虛數單位 i 等。

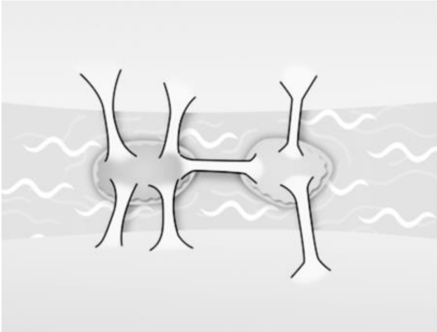
尤拉恆等式

$$e^{i\pi}+1=0$$

曾經被兩本數學雜誌評選為史上最漂亮數學公式的第一名。尤拉本人也非常喜歡這恆等式，原因是式子中的 0 與 1 分別是加法與乘法的單位元素，式子中還有加法、乘法與次方三種運算，並且涵蓋複虛數 i 及圓周率 π 兩個重要的數學符號。下圖則是尤拉注視著現代蘋果電腦公司在 i-phone 手機背殼上所刻的尤拉恆等式。

㊀尤拉

提到尤拉就讓人聯想到他在哥尼斯堡七橋問題上的畫龍點睛之作：每座城市被濃縮成為一個點，而橋樑被幻想成為連接兩點間的線段。這出神入化的轉換，讓網絡圖解決了七橋問題，在當時，也只有鬼魅數學家尤拉才想得出來。哥尼斯堡七橋問題是基於一個現實生活中的事例：當時東普魯士哥尼斯堡（今日俄羅斯加里寧格勒）市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島，小島與河的兩岸有七座橋連接。哥尼斯堡市長要求尤拉找出一條散步路線，讓人能走經哥尼斯堡的七座橋，而且每座橋只能經過一次。



哥尼斯堡七橋問題是現代圖論中的有名問題，這個問題在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？於 1736 年，尤拉在聖彼得堡科學院發表了圖論史上第一篇重要文獻，圓滿地解決了七橋問題，並證明市長要求的散步路線並不存在，也順帶解決了所謂的「一筆畫問題」。

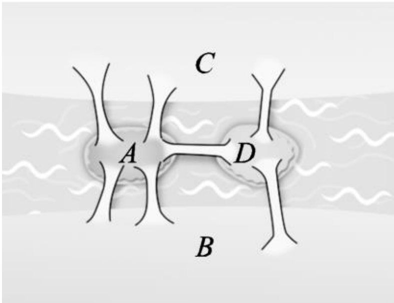
尤拉把實際的問題簡化為平面上點與線的網絡圖，每一座橋視為一條線，橋所連接的地區視為點。這樣若從某點出發後最後再回到這點，則這一點所連出去的線數必須是偶數條。為了方便解釋，把連出去的線數為奇數的點稱為奇點，而連出去的線數為偶數的點叫偶點，而所謂的網絡圖能一筆畫就是可以從某起點出發，在每條線剛好畫過一次的條件下，最後畫到另一個終點，要注意的是：起點是可以等於終點。

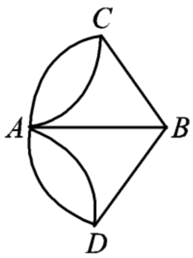
更詳細的討論是：如果一個網絡圖能一筆畫完成，那麼一定有一個起點開始畫，也有一個終點。有一條邊進這點，那麼就要有一條邊出去，有進無出的點肯定是終點，而有出無進的點就是起點。因此在「過路點」進出的邊總數應該是偶數，即「過路點」是偶點。綜合起來，能一筆畫完成的網絡圖必須具備以下兩個條件中的一個：

① 如果起點和終點是不一樣，那麼起點與終點必須是奇點。

② 如果起點和終點是同一點，那麼它也是屬於「有進有出」的類型，因此必須是偶點，這個網絡圖上的每個點都必須是偶點。

尤拉把哥尼斯堡附近的地圖轉化成可以用一筆畫思考的網絡圖，其中 *A,B,C,D* 四點代表四塊區域濃縮所產生的點，而點與點的連線就是橫跨區域之間的橋樑。

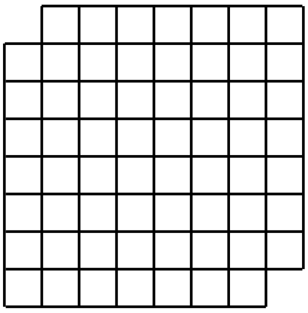


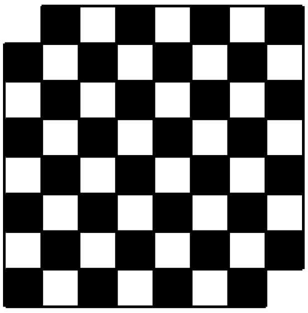


因為四個點都是奇點，所以無法將這網絡圖一筆畫。把這線條圖上的推論還原回實際的問題，就是告訴我們：遊覽哥尼斯堡的七座橋，而且每座橋只能經過一次的散步路線是不存在的。

哥尼斯堡七橋問題是一道「無解」的問題，而這個無解並不是幾何學裡的邊長與角度兩個量度上的無解，而是將城市縮成一個點，橋樑當成連接點與點之間的線段，透過有出就有進的一筆畫原理說明「哥尼斯堡市長所要求的散步路線是不存在的」。尤拉的一筆畫作法使幾何學擺脫了測量距離與角度的負擔，而開啟了現代拓樸學的一扇窗。有了七橋問題的經驗之後，碰到幾何問題不一定要從長度與角度的幾何量著手，也可以考量其他的方法。

底下就是一道典型的幾何謎題：切下棋盤斜對角線上的兩個邊角，如下左圖所示，然後你是否可以用 31 張長方形骨牌去完全覆蓋這個棋盤？每一張骨牌的大小必須剛好覆蓋棋盤上相鄰的兩個正方格。



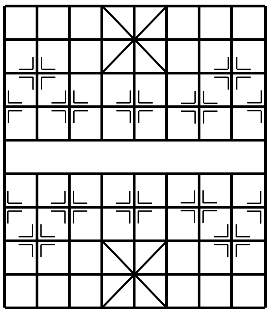


這道謎題對經驗不足的初學者來說，簡直是一道難題，但對看過解答的老鳥來說，卻又是送分題。我們只需將棋盤塗成黑白相間的西洋棋盤樣式，如上右圖所示，接著發現：每塊骨牌無論橫著擺或者縱著放，都剛好占據一格黑色與一格白色的正方格。而這棋盤一共有 62 格正方格，需要 31 塊骨牌才能蓋滿，但這 31 塊骨牌應該蓋住「31 格黑色正方格與 31 格白色正方格」，這剛好與棋盤上的「32 格黑色正方格與 30 格白色正方格」相抵觸。也就是說，這也是一道無解的問題。

「數學知識是被發現還是被發明或者被創造的，或者兩者皆有」是一道有趣的哲學問題，同樣的「數學遊戲是被發現還是被發明或者被創造的，或者兩

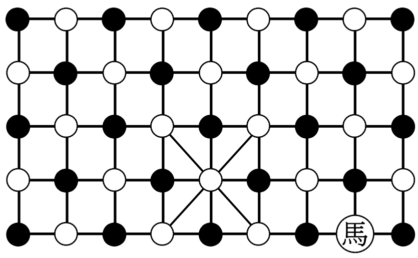
者皆有」也是各說各話的問題。像網絡圖的一筆畫原理是因七橋問題而誕生，還是七橋問題只是一個動機，讓早就存在的數學知識「一筆畫原理」被數學家發現呢？接下來是遊戲時間，讓我們介紹一道象棋的啟蒙遊戲...老馬識途。

中國象棋盤由九道直線和十道橫線交叉組成，棋盤上共有 90 個交叉點，象棋子就擺放和活動在這些交叉點上，棋盤分成兩個半張，每半張都是由九道直線和五道橫線交叉組成，共有 45 個交叉點：



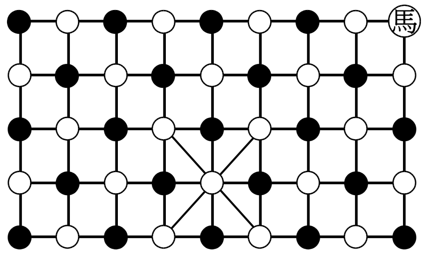
一隻馬能否跳遍半張空象棋棋盤上的每一個交叉點？答案是肯定的，稍具象棋知識的人，都能準確回答這個問題。但是若進一步要求：是否能找到一條路徑，讓馬跳遍半張空棋盤上所有交叉點的過程中，任意一個交叉點只允許被馬踩過一次？後面這個問題，恐怕要難倒許多人了。這個古老難題，在西方稱之為「騎士旅遊」，早在十六世紀時，瑞士數學家貝爾特蘭德即提出這個問題，著名的大數學家尤拉在 1759 年開始研究它，並獲得了一般解法。

讓我們將思緒跳回到半張象棋棋盤上，如下圖，將 45 個交叉點塗上黑、白的顏色，計算一下，有 23 個交叉點被塗上黑色，其餘的 22 個交叉點被塗上白色（包括馬所在的位置也是白色）：



馬從白色交叉點出發，是否可以找到一條路徑，讓每一個交叉點剛好被馬踩過一次？用馬走的日步模擬一下，不難發現：前後兩步分別會落在不同顏色的交叉點上。既然馬從白色交叉點出發，這代表馬的奇數步落在白色交叉點，而偶數步停在黑色交叉點上。又半張棋盤一共有 45 個交叉點，若馬找到每一個交叉點剛好被踩過一次的旅行方式，則奇數步有 23 步，偶數步有 22 步，也就是說，馬會踏過 23 個白色交叉點及 22 個黑色交叉點。這顯然與半張棋盤上的交叉點顏色分布不合。那就是說，馬從白色交叉點出發，是沒辦法完成旅行的。

最後來一道象棋專家的餘興節目，我們把馬起始位置改變一下，讓馬從黑色交叉點開始跳躍，結果又如何呢？各位可以從下圖中動手嘗試看看，能否讓馬剛好踩過每個交叉點一次的前提下，讓馬以日步完成半張象棋棋盤的旅行：



這是一道帶有東方色彩的餘興節目,「馬走日步」更是道地的中國口味。在中國，馬是一種獨特的動物，牠可文可武，可以是人文、藝術與棋藝的主題，也可以是主導整齣戰爭歷史的利器；可以是貴族用來標示身分地位的象徵，也可以是攸關庶民生活的重要寄託。我們很難找到一種功能如此多元、指向如此豐富、可平實又可高貴、與人長期相伴的動物。

在餘興節目中，稱這遊戲為老馬識途，是有數學典故的，而這典故跟唐朝及中國數學家陳省身有關聯。唐太宗昭陵上,有六匹駿馬的浮雕石刻聞名於世，俗稱昭陵六駿（白蹄烏、青騅、颯露紫、拳毛騧、特勤驃、什伐赤)。這六匹戰馬是李世民在唐開國戰爭中南征北討的坐騎，並命唐初大畫家閻本立繪草圖，監石雕而成，因而有

「秦王鐵騎取天下，六駿功高畫亦優」

這樣的詩句流傳於世。這六匹馬中的颯露紫與拳毛騧於 1914 年被盜，運往美國，現藏於美國費城賓夕法尼亞大學博物館，它們的複製品與其餘四匹駿馬的真品陳列於西安碑林博物館。數學家陳省身有感於古物流落他鄉的遺憾，特在偉大數論學家韋依所著的《數論》這本書的扉頁上，用毛筆書寫著「老馬識途」四個中文字，並附上拳毛騧的圖片。渴望它們早日回歸故里。

唐太宗懷念的這六駿，有的在箭雨中穿行，帶傷而馳；有的跨河飛奔，越野而去；有的緩步慢行，若有所思。閻本立所草繪的六匹駿馬中，三匹作騰蹄飛奔之狀，三匹為站立徐行的姿勢；有些馬則身中數箭，甚至有一幅是描述邱行恭武將替太宗的一匹愛馬拔箭的情景：

最後讓我們回到尤拉，如開頭所言，~~複~~**虛**數單位i是尤拉發明的，想必尤拉在方程式上也有很大的貢獻，這裡提出一則尤拉在解方程式上的天才之旅。在「代數基本定理」尚未被證明正確之前，萊布尼茲就質疑過「每個實係數多項式都可以分解成一次或者兩次實係數多項式的乘積」的正確性。數學家白努力更舉一個精確的例子說：「四次多項式

$$f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x+4$$

就不可能分解成兩個實係數多項式的乘積」。

然而，代數大師尤拉在 1742 年時，將白努力所舉的四次多項式$f(x)$分解為二次多項式

$$x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$

與另一個二次多項式

$$x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$

的乘積。如果再套一下一元二次方程式根的公式解，那麼尤拉就把這個四次多項式方程式的四個根都精確的表達出來了。真不知道這神奇的因式分解是如何想出來的！

像這種類似的例子還有許多，例如將乘式

$$\left(x^2+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}x+\sqrt{5}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}x+\sqrt{5}\right)$$

乘開，也是一個以整數為係數的四次多項式。

尤拉是第一位將-1的平方根$\sqrt{-1}$定義為i的數學家，究竟在那個時代，人們如何理解i這個「數」呢？我們以尤拉的一段話來作結束：「所有可能的數不

是大於 0 就是小於 0 或等於 0，所以負數的平方根就不能是個數。既然是不可能的數，…，我們只能稱之為虛數，因為只有在虛幻中才會有這樣的數。」

尤拉：

尤拉，2013.10.18 取自 http://aprendiendomatematicas.com/bachillerato/los-puentes-de-konigsberg/