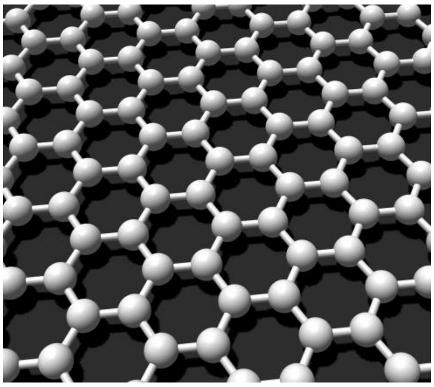
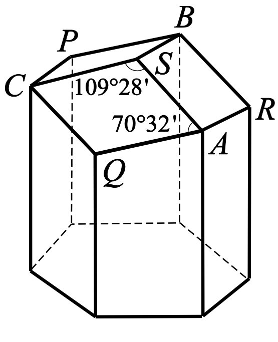
# 藝術上的密鋪平面…艾薛爾的跨界之旅

有稜有角的正三角形，四平八穩的正方形與圓
融肚量大的正六邊形是鑲嵌平面的不二人選。

俄羅斯出身的學者蓋姆(Andre Geim)與諾伏西羅夫(Konstantin Novoselov)共同獲得 2010 年諾貝爾物理學獎，他們是研究石墨烯（Graphene）的先驅，而這種薄膜號稱是 21 世紀的神奇材料。瑞典皇家科學院讚揚石墨烯是「完美的原子晶格」，因為這種材料在電腦、家用裝置和運輸方面都有很大的發展潛力。石墨烯的厚度只有一個原子，是世界最薄卻也是最堅強的奈米材料，幾乎透明，特性是電阻極低，電子跑的速度極快，幾乎是沒有質量的粒子才能有的特性，速度只比光子慢了三百倍，比現行的半導體矽材料快了至少十倍，是非常好的導體。因此，石墨烯被看好是可能取代矽半導體的材料。瑞典皇家科學院讚許蓋姆和諾伏西羅夫說，他們「證明了碳以如此平面形式呈現時，擁有卓越的特性，這種特性源自量子物理學的奇異世界」。



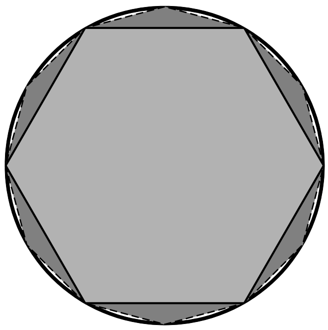



從左圖可以看出石墨烯是正六邊形的網格構造，而中圖的蜜蜂蜂巢截面圖也有同樣的六邊形幾何結構。蜂巢的基本結構，是由一個個正六邊形單房、房口全朝向同一邊、緊密排列組合而成的建築物，而蜂巢的材料正是公蜂所分泌的蜂蠟。右圖是將單一個蜂巢倒過來看的結構圖，從圖中可以發現巢底並不是平的或半球形的結構，而是由三個全等的菱形拼成。事實上，蜂巢造型奇特、結構巧妙，可謂巧奪天工，很早就引起了科學家們的濃厚興趣，天文學家克卜

勒指出:「這種充滿空間對稱蜂巢的角度，應該和菱形十二面體的角度一樣。每個正六稜柱狀蜂巢的底部，都是由三個全等的菱形拼成的，而且每個菱形的鈍角都等於109°28'，銳角都等於70°32'。」

據估計，工蜂分泌一公斤的蜂蠟需要消耗16公斤的花蜜；而採集一公斤的花蜜，蜜蜂們必須飛行32萬公里才得以完成；相當於繞行地球八圈的距離。因此，蜂蠟對蜜蜂而言，是寶貝珍貴的，而且數學家已經證實蜂巢的結構是最省材料的建築物，所以說蜜蜂是世上最會節能省料的建築師。

正六邊形不僅在科技材料、蜜蜂蜂巢結構上出現，也是中國估算圓周率$\pi$的初始圖形；三國時代的劉徽就是從六邊形出發，提出一個十分精彩的「$\pi$演算法」，稱為割圓術。劉徽從圓內接正六邊形開始，先分割成十二邊形，再細分為24邊形、48邊形、96邊形，直到圓內接正192邊形止。



劉徽發現分割愈細多邊形的邊數愈多，多邊形的面積就會和圓面積沒有差別了，透過這樣的過程，劉徽算得圓周率$\pi$介於3.141024與3.142704之間。《九章算術》註文寫著:「割之彌細，所失彌少；割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」這段註文充分說明了劉徽對極限概念，已經具有了相當程度的認識了，也是對割圓術的精彩註解。

南北朝的祖沖之繼承劉徽割圓術的衣缽，同樣從圓內接（外切）正六邊形開始，經過12次的分割，計算至正$24576=6\times2^{12}$邊形與圓周的細微差異，得到了有名的祖沖之圓周率不等式

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

祖沖之這一精確到小數點後第七位的結果，直到一千年後才被15世紀的阿拉伯數學家以十七位有效數字的紀錄打破。為了紀念祖沖之的貢獻，人們將月球背面的一座環形山命名為「祖沖之環形山」，也將小行星1888命名為「祖沖之小行星」。

兩千多年來,$\pi$ 的計算只能使用多邊形,但是到了17世紀微積分發明之後,開啟了增值$\pi$ 的新紀元，例如 1844 年，德國數學家利用以下的展開式

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{8}\right)^1}{1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{8}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{8}\right)^5}{5}-\cdots,$$

將$\pi$ 算到兩百位的準確值，師大數學系的洪萬生教授懷疑這個展開式有可能是高斯建議的。

正六邊形在祖沖之的妙算之下與圓相融、在蜂巢的巧妙構造下與簡約為鄰、在碳原子的圍繞之下達到善導電的效果，它可說是自然界的妙圖形。想想看，自然界還有哪些這樣的美妙圖形呢？這類圖形的一大特色就是他們可以蓋滿整個平面，不會留下任何空隙。從「蜜蜂以正六邊形的形狀構築他們的房子，設計師以方形磁磚裝飾室內地板,工人用三角形地磚美化人行道」知道正三角形、正方形與正六邊形是可以蓋滿平面而不留下任何空隙的圖形，而透過角度的計算,也可以證明「想要採用同一種形狀的正多邊形來蓋滿大地,唯有正三角形、正方形與正六邊形三者而已。」

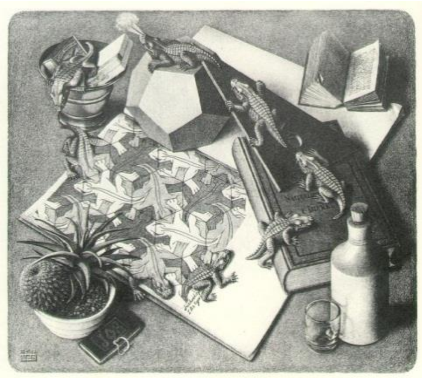
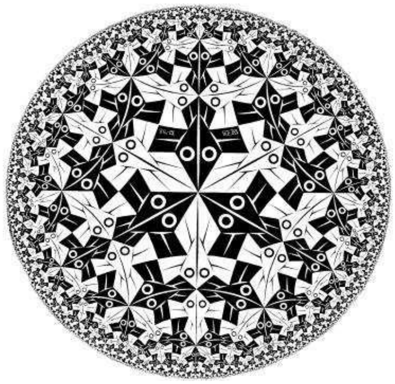
國際數學家大會（簡稱 ICM）是由國際數學聯盟主辦的全球性數學學術會議。會議的主要內容是進行學術交流,並在開幕式上頒發菲爾茲獎(1936 年起)、奈望林納獎（1982 年起)、高斯獎（2006 年起)。首屆國際數學家大會 1897 年在瑞士蘇黎世舉行，1900 年巴黎大會之後每四年舉行一次，進入 20 世紀的這次大會以希爾伯特在歷史與教育兩組聯席會上的講演《未來的數學問題》(在刊印的講稿中，他共列出 23 道問題，但他在實際講演中，因時間關係只講了其中十道問題，即1,2,6,7,8,13,16,19,21及 22)，確立了這次巴黎國際數學家大會在數學史上的地位，希爾伯特認為「通過對這些問題的研討，可以期待科學的進步。」解決這 23 道難題也成為今後所有數學家的共同夢想。

第十二屆國際數學家大會在荷蘭阿姆斯特丹舉行，主辦單位也為當地的版畫家艾薛爾（M. C. Escher, 1898~1972）在國立博物館（荷蘭最大的博物館）舉行一次個人畫展，作為大會文化活動的一部分，這個展覽得到了《時代》雜誌的好評。艾薛爾展覽了多幅龐加萊圓盤上的鑲嵌圖案，讓原本只有少數數學家喜愛的龐加萊圓盤在這次展覽之後成為家喻戶曉的數學美術。在國際數學家大會之後，艾薛爾結識當代最優秀的幾位數學家，從他們那裡攝取養分，轉換成版畫藝術。他真的讀過一些頂尖數學家的最新論文，雖然他自稱看不懂，但是他其實已經領悟其中的微妙結構，並且將其精髓用藝術形式呈現出來了。雖然

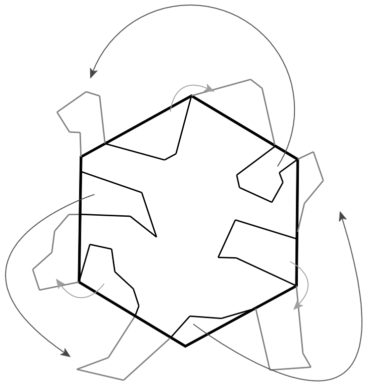
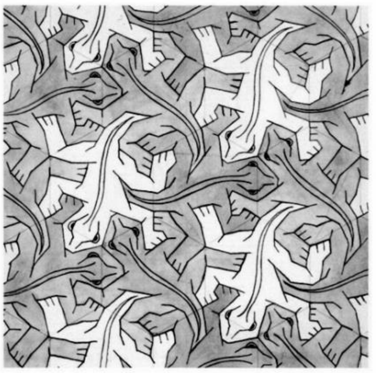
他的呈現方式不是方程式、也不是定理和證明，而是圖畫，但是有數學家認為，他的作品在精神和意義上「就是數學沒錯」。

就學歷而言，艾薛爾連一張正式的大學文憑都沒有，而且他的中學成績很差，幾乎所有科目都被當掉了，所以不能讀大學。他的父親把他送去建築與室內設計專科學校，希望他學習成為一個建築師。他在第一所學校的功課也是差不多能當的都當了，轉到第二所學校之後遇到恩師，發現他的繪圖天分，建議他改學藝術而不是建築。他只考慮了一個星期就決定通知父親說他要改行了，從此跟著老師學木刻和版畫。

畢業後，艾薛爾在西班牙進行旅行時，對格拉納達的阿爾罕布拉宮印象深刻，這宮殿是 14 世紀的穆斯林建築，宮殿裡的地板、牆壁、天花板都用許多的複雜幾何圖案和反覆性圖案來裝飾，其圖案之豐富，實令人歎為觀止。這些鑲嵌圖案讓艾薛爾對密鋪平面產生了興趣，並且嘗試應用在作品中。此後他一生中共創作了 137 幅平面鑲嵌畫。下圖中的左圖是艾薛爾在平面上的一幅鑲嵌圖案，只用一隻蜥蜴就蓋滿整個平面，而右圖是龐加萊圓盤上的另一幅鑲嵌圖案，當圖案愈靠近圓盤邊緣時，圖形就愈小，但是他們並不知道他們變小了，因為他們的測量尺度也變小了，這是非歐幾里得原理所產生的一種深奧現象。

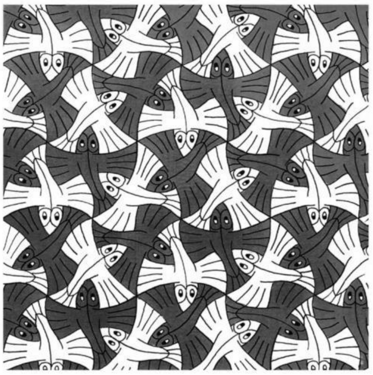
鑲嵌或密鋪（Tessellation）是指「將具有獨立封閉外形的圖形以連續、反覆且不重疊，也不留空隙的形式在平面上展開」的意思，艾薛爾在他的論文中，將鑲嵌圖案或密鋪平面稱為「平面規則分割」，並解釋為「一塊平面或龐加萊圓盤，它應是被想成有無限的邊際，可將之填滿或被分割成無數類似的幾何圖案，不留任何虛的空間。」艾薛爾以手繪的方式，創作了許多豐富且極具創意的鑲嵌圖案。在數學上，我們可以用平移、旋轉與對稱及加減遞補的方式來詮釋艾薛爾的繪圖方法，讓我們來欣賞一幅艾薛爾在密鋪平面上的數學藝術〈蜥蜴〉；以正六邊形當骨架，從正六邊形內部剪下六小塊，貼到外部適當的位置，以拼出蜥蜴的外形，其中頭及兩隻後腳是透過固定點順時針旋轉而成，而尾巴及兩隻前腳是透過旋轉之後再移位補上的，如下圖中的左圖。

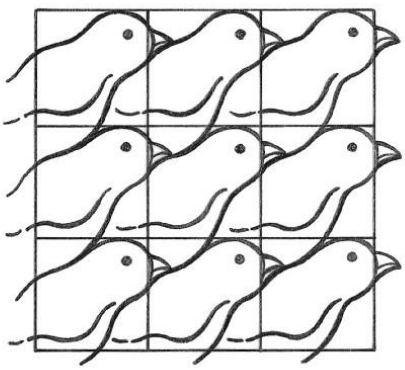
右圖則是艾薛爾以三種顏色不同但形狀一樣的蜥蜴，讓牠們相親相愛的團聚在一起，這都要歸功於以正六邊形密鋪整個平面的一個性質「每個正六邊形的頂點都恰被三個正六邊形圍繞著」，從石墨烯或蜂巢結構圖就可以看出來。很多玩具公司將艾薛爾密鋪平面的圖片設計成拼圖遊戲，由於艾薛爾賦予具象造型的趣味，他們融合美感形式與數理概念的雙重特性，應用在激盪腦力、啟發創意的益智拼圖遊戲，啟迪孩子的智慧。

傳統拼圖遊戲的概念是將一張圖片分割成形狀、面積皆不同的數塊，在打亂秩序的條件下，讓玩家再將這些散落的拼圖塊，以外形互相嵌和及相鄰邊界的圖案必須連貫為依據，以不重疊及不留下空隙的方式填滿指定的區域。然而艾薛爾的創意數學拼圖，拼圖塊的面積、形狀完全相同，頓時失去相鄰邊界的圖案必須連貫的線索，純粹以拼圖塊的外形是否互相嵌和的依據來判斷，相較於傳統拼圖遊戲，困難度提高許多。

除了從正六邊形出發外，艾薛爾的許多鑲嵌圖案是從正方形與正三角形演化而來的，例如下圖的〈飛魚〉就是從正三角形加工拼湊而成，而〈鴨子〉則是由正方形透過左右及上下各一次的加減遞補出來的。

做個實驗吧！下圖中的〈信鴿〉與〈飛馬〉是從哪種正多邊形拼湊而成。

從這些例子，我們可以知道：艾薛爾透過平移、旋轉與對稱的加減拼湊方法，將一個簡單可以填滿平面的幾何圖形，透過他豐富的想像力及熟練的手畫技巧，幻化為生動、有趣且一樣可以密鋪平面的數學美學圖案。

正三角形磁磚會讓人產生有稜有角的感受，比較適合當人行道上的地磚，可以達到提醒路人小心的目的；正方形磁磚給人有四平八穩的氣氛，適宜當居家室內的磁磚，隨時散發出居住舒適安穩的氛圍；而正六邊形磁磚讓人有圓融肚量大的感受，是寺院廟宇地磚的不二選擇，充分散播出人生的圓融與和諧。艾薛爾則柔化了稜與角，美化了邊成為弧線，幻化出生動活潑的各種動物造型磁磚。

最後要感謝兩位老師促成我寫這篇文章的動機，廖惠儀老師在臺南的演講會場提供我艾薛爾〈飛馬〉的影片；洪萬生教授推薦我閱讀時報出版的科普書籍《數字奇航》，艾利克斯・貝洛斯著，胡守仁譯。