

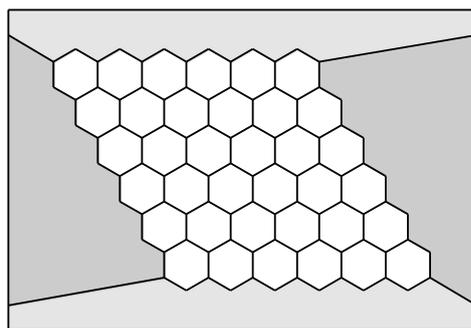
納許棋…諾貝爾獎得主的遊戲

在你了解它之前，它是魔術；了解它之後，它就是數學了

納許(John Nash)是一位不折不扣的數學家，他在就讀普林斯頓研究所時，發明了「納許棋」，曾流行了一段時間，正值人生璀璨的三十歲之時，納許陷入失心與幻想，在1960至1990這漫長的三十年間，納許鬼魅似的出現在普林斯頓校園，又於1990年傳奇的甦醒，並旋於1994年獲頒諾貝爾經濟學獎。國內影音出租店就可以租到的片子《美麗境界》就是在描述納許傳奇性的一生，有一幕是納許拿著紅色簽字筆在透明玻璃上畫正六邊形的情景，應該是在敘說他發明過「納許棋」這道遊戲吧！



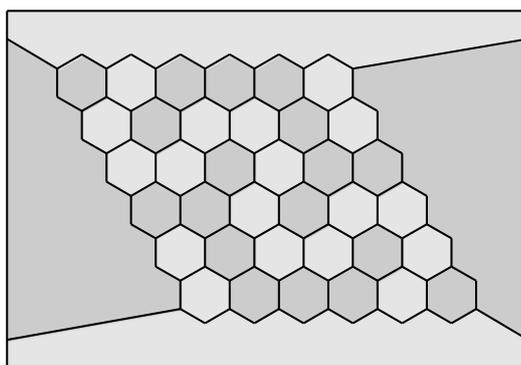
1942年，丹麥哥本哈根大學數學系教授海恩(Piet Hein)在上課的講義裡介紹過納許棋，而當地報紙也在同年的12月26日刊載了這道遊戲的玩法，而且這道遊戲在丹麥很受歡迎。至於納許重新發明這道遊戲的時間點則在1949年就讀普林斯頓高等數學研究所的時候。馬丁·加德納是美國有名的業餘數學大師，從1956到1986這三十年間，在《科學人》雜誌上開設一個數學遊戲專欄，在1957年的專欄中提到「海恩是納許棋的第一位發明者，不過納許的重新發現及對納許棋的理論有相當重要的貢獻。」將納許棋與五子棋、象棋、圍棋及西洋棋相比，他們的共同點都是兩個人玩的遊戲，而不同的地方在棋盤的形狀，納許棋盤是由正六邊形的格子所構成。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是6階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形土地密鋪而成）：



納許棋盤

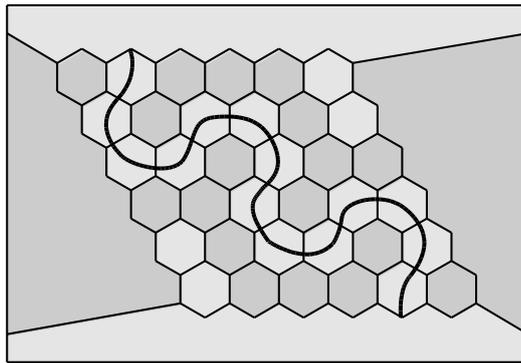
有了棋盤，接下來就是「怎麼玩？勝負該如何判定呢？」我們把棋盤內正六邊形土地以外的區域著色，讓它涇渭分明，上、下兩塊塗成紅色，是紅方的基本領土；而左、右兩側則塗成藍色，為藍方的基本領土。玩法就是讓紅、藍雙方輪流占領正六邊形的土地，每次只能占一塊，並將占領的土地塗成紅色（紅方的領土）或畫成藍色（藍方的土地）。顯然地，在十八回合後，紅方與藍方將分別占領三十六塊土地的一半。

至於遊戲的勝負如何判定呢？那要看哪一方可以將他的兩塊基本領土，用所占領的正六邊形土地連接起來。也就是說，紅方從上方紅色領土出發，在只能經過他占領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方紅色領土時，紅方就獲勝；同樣的，若藍方從左側的藍色領土出發，利用他所占領的正六邊形土地，可以抵達右側的藍色領土，則藍方得勝。舉例來說，下圖是紅方與藍方在纏鬥十八回合後的交戰紀錄（紅色正六邊形為紅方所占，藍色正六邊形為藍方所有）：



納許棋盤

從這交戰紀錄圖，能一眼看出誰獲勝，或者平手嗎（雙方都無法將他們的兩塊基本領土連接起來）？從下圖中，因為粗黑線是貫穿紅方兩塊基本領土的一條路徑，所以這盤棋由紅方得勝：



納許棋盤

至此，相信讀者容易理解納許棋是一道規則簡單，好玩又有趣的遊戲，但是也會發現這道遊戲的一些特性，例如，至多十八回合遊戲就會結束，而且不可能兩人都獲勝，這是因為當一方可以串連他的基本領土時，另一方的土地肯定被這串連的路徑所阻隔。也就是說，至多僅有一方可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生雙方都無法串連他們的基本領土之情形呢？知道這個答案後，肯定讓你對納許棋更愛不釋手，同時這也是納許的兩個重要結論之一：

無論雙方如何占領正六邊形土地，最後一定有一方會得到勝利，也就是說，納許棋是一種不會平手的遊戲。

我們可以將納許棋盤設計成電路，當一方將兩片土地串連起來時，電就通了，會亮燈，從亮燈的顏色就可以知道誰獲勝。想把這道遊戲設計成電腦可以玩的遊戲，就需要從電路這個方向來寫程式。幸運的是，師大數學系的林俊吉同事跟我推薦一個網路上可以下載的程式，透過這個程式就可以在電腦上玩納許棋遊戲了，這程式是前蘇聯的一位數學家寫的，可以從以下的網址下載程式：

<http://home.earthlink.net/~vanshel/>

這程式的功力不錯，可以跟電腦玩，也可以兩人玩（電腦只做輸贏判定），甚至可以改變棋盤的大小。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋、五子棋、圍棋、西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的如此嗎？讓我們用數學課堂外的想法來了解它吧！

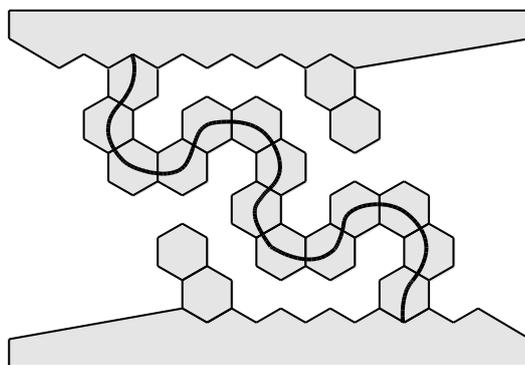
剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根據考古其歷史可追溯到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。



使用屬於右腦的剪紙藝術來處理左腦領域的納許棋遊戲看似詭異，其實是一種跨界的思考，也是一種普遍的現象。一個明顯的例子就是心算，心算可以透過快速的左腦運作來進行演算，但是日本的心算高手都是在腦海裡讓算盤浮現的方法來運算的，這種不需要思考，只讓影像浮現的珠算式心算，會更快且更準，而它使用的卻是右腦。

我已經忘了將納許棋跟剪紙技藝牽扯在一起的思維是怎麼產生的，甚至是什麼時候，在哪裡，也記不得了。但是，他們的操作方法倒是寫得蠻詳細，以下是我記錄下來的說明「納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？」

- (1) 利用剪刀將藍方的左、右兩塊基本領土給剪掉。
- (2) 再利用剪刀將藍方占領的十八塊正六邊形土地也剪掉。
- (3) 此時棋盤剩下紅方的上、下兩塊基本領土及它所占領的十八塊正六邊形紅色土地。
- (4) 將右手抓住紅方上方紅色基本領土，左手捏著紅方下方的基本領土，看看是否可以將它們拉開。
- (5) 若不能拉開，則表示紅方的上、下兩塊基本領土被它占領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣，紅方勝。
- (6) 若可以拉開，則所拉開右手（或左手）邊緣的藍色土地，是條可以貫穿藍方左、右兩塊基本領土的路徑，這樣代表藍方勝。



納許棋盤

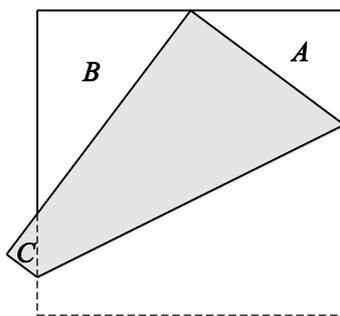
簡單說，拿出剪刀將藍方的基本領土及它所佔的六邊形土地都剪掉，紅方的兩塊基本領土若相連，紅方勝，不相連，藍方勝。

從剪紙的這項技藝，我們已經知道納許棋是一種不會平手的遊戲，這真是有夠怪的說明。接下來的問題就是「哪方有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。不過還是把納許的第二個結論寫下來：

先玩的紅方只要沒犯錯，應該會獲勝。

從「不會平手」到「先玩有優勢」是納許對該遊戲的兩個貢獻，問題是沒犯錯講得太籠統了，納許也沒有把贏的策略寫下來，他只用抽象的方法證明先玩有優勢而已。直到今日，找尋贏的具體策略仍然是納許棋遊戲的一大難題。

剪紙給人的刻板印象就是一種藝術，沒想到它也可以跨界幫忙解決數學問題，同樣的情況也發生在摺紙這項技藝上。日本摺紙大師芳賀和夫說：「大多數的日本人都熱衷於創造新的摺紙形狀，我的目的是跳脫在實際上創造新東西，反而是發現數學現象。這就是為什麼我會這麼感興趣。就算在極其簡單的世界，一樣能夠發現令人著迷的東西。」從這段話可以理解，芳賀傾向於將摺紙跨界來發現或解決數學問題，而不是將它僅看成一項藝術。在芳賀的心中，摺紙是沒有算式的數學，他以細膩的巧手取代抽象又難懂的數學式子，現在就讓我們來欣賞一道芳賀的摺紙術，在1978年，芳賀將正方形紙的一角摺往一邊的中點，結果製造出三個埃及直角三角形A、B及C（三邊比例為3:4:5的三角形），如下圖所示：



「尺規作圖」與「摺紙」都是在紙張上工作，但是他們卻有極大的不同限制，尺規作圖只能貼在平面上操作，而摺紙卻可以在空間中翻轉與運行。所以利用摺紙跨界來解決古希臘尺規作圖難題也是一種合理的想法。在1936年，義大利數學家利用摺紙可以摺出長度為 $\sqrt[3]{2}$ 的線段，這也證明了，在容許摺紙的情形下，古希臘的「倍立方問題」是有解的。同樣，在容許摺紙的情形下，「三等分角問題」也是成立的，甚至連無法尺規作圖的正七邊形也可以透過摺紙的

技術摺出來。

讓我們跳回納許的棋盤吧！納許棋盤是由正六邊形的幾何圖形所構成，據說普林斯頓高等研究所當時的磁磚就是正六邊形，而這也是啟發納許發明此遊戲的動機之一。去過澎湖的人一定會到有名的天后宮參觀，仔細觀察其地磚，將會發現也用了正六邊形的磁磚。事實上，金門的洋樓或廟宇、鹿港的天后宮與龍山寺也使用正六邊形的磁磚，正六邊形是很好用的幾何圖形，特別是在鑲嵌平面上。