

休閒數學的濫觴…中國的洛書

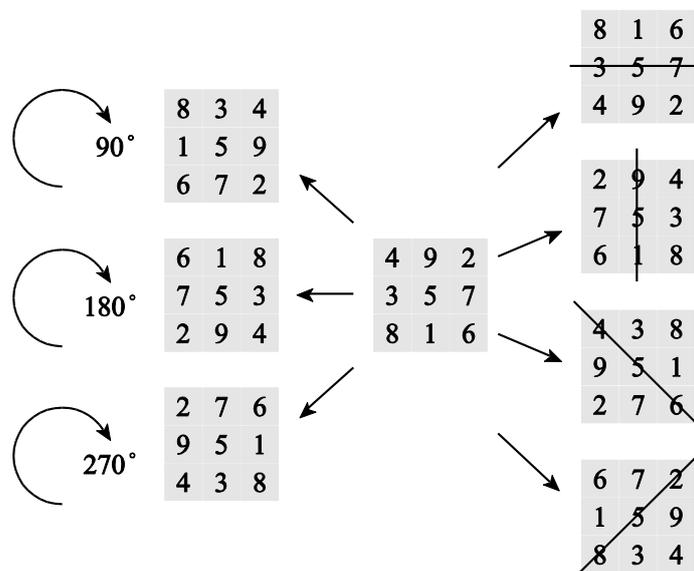
九宮者，二四為肩，六八為足，左三右七，戴九履一，五居中央。

數學謎語，兒歌與遊戲，現在統稱為休閒數學，而休閒數學的一個里程碑係發生在公元前 2000 年的黃河岸邊。據說大禹治水的時候，看到一隻烏龜爬出洛水水面，這是一隻神龜，龜甲上有黑白點的圖案，代表 1 到 9，排成格狀，如下圖：



像這樣一個正方形，裡面的數字是由 1 開始的連續整數，每一行，每一列及兩條對角線的和都相等，稱之為「幻方」、「魔方陣」或「縱橫圖」，而中國人稱這個正方形為「洛書」（任意一行、任意一列以及兩條對角線的數字之和都是 15），歐洲人直到十四世紀才開始研究幻方，比中國人遲了近兩千年。南宋數學家楊輝在 1275 年所著的《續古摘奇算法》書中提到幻方的要訣為「戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足」。

我們有八種方式排列 1 到 9 的數字，使得所形成的 3×3 方塊成為幻方，但是這八個幻方經過旋轉或鏡射後，事實上都是同一個，如圖所示。因此，三階的幻方只有洛書這一個而已。

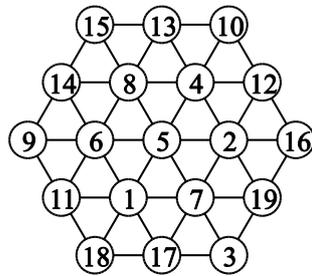


幻方不必限定是3×3的格子，下圖是1957年於陝西西安市元代安西王府遺址出土的「幻方鐵板」，出土地點在今天西安火車站東北三公里處，是元代安西王府的遺址，而安西王府是忽必烈的三兒子忙哥刺的王宮。

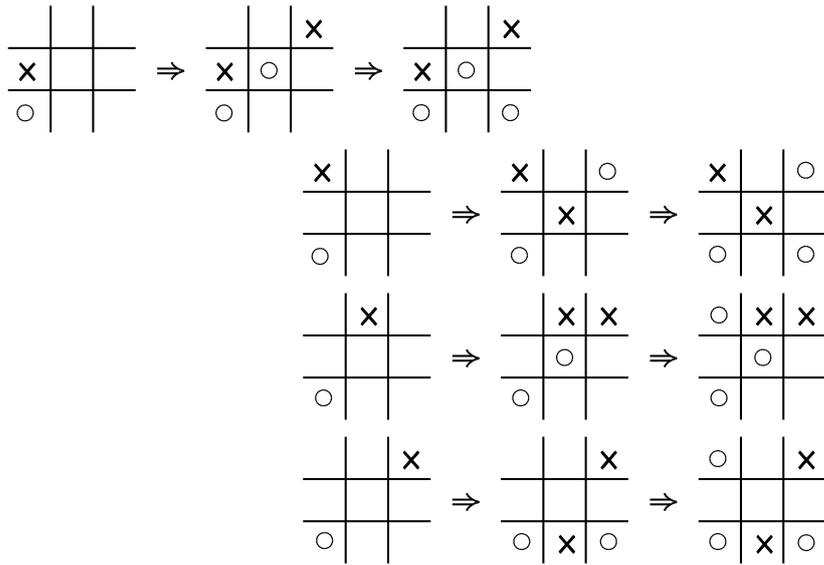
| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|
| 28 | 4 | 3 | 31 | 35 | 10 | 元 |
| 36 | 18 | 21 | 24 | 11 | 1 | 代 |
| 7 | 23 | 12 | 17 | 22 | 30 | 幻 |
| 8 | 13 | 26 | 19 | 16 | 29 | 方 |
| 5 | 20 | 15 | 14 | 25 | 32 | 鐵 |
| 27 | 33 | 34 | 6 | 2 | 9 | 板 |

幻方鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是111。這個蘊含著數學原理的六六幻方，在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。

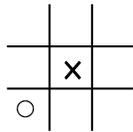
雖然幻方的歷史已很悠久，但由於幻方中出現的一種變幻莫測的神奇數字之美，人們往往花上幾小時把玩幻方而樂此不疲。在1910年，美國有一位鐵路公司職員阿當斯是一名幻方的業餘愛好者，他渴望能造出一個三階的六角幻方。歷經47個寒暑，經過無數次的挫折與失敗，終於找到了下圖的六角幻方，在今日，可以用電子計算機證明六角幻方也只有阿當斯構造的這個而已。



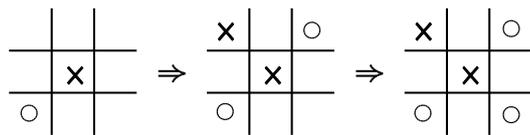
洛書可以看成在九宮格裡填上1到9的數字，而且行、列、對角線的和都是15的休閒數學。在九宮格上玩得膾炙人口的遊戲大概就是圈叉遊戲了，這遊戲有兩位玩家，先玩者打「○」，而後玩者打「×」，輪流在九宮格打自己的符號，最先以橫、直或斜連成一線者獲勝。玩過此遊戲的人都知道，這是一道先玩者控制，後玩者防守的遊戲，只要雙方沒犯錯，最後都會以平手收場。先玩者經常誤以為「將第一個圓圈畫在正中央」是最佳的策略，事實上並非如此，而是應該將第一個圓圈畫在角落才有最大的勝算。例如以下四種開局，先玩者都可以製造出雙頭蛇而取勝：



因此，在這種開局之下（含另外三種對稱性的開局），後玩者只能以下列方式（將「X」落在正中央）來對應



即使是這樣的對應，先玩者還是可以在下一手誘導對手犯錯，下圖就是最常見的犯錯模式：



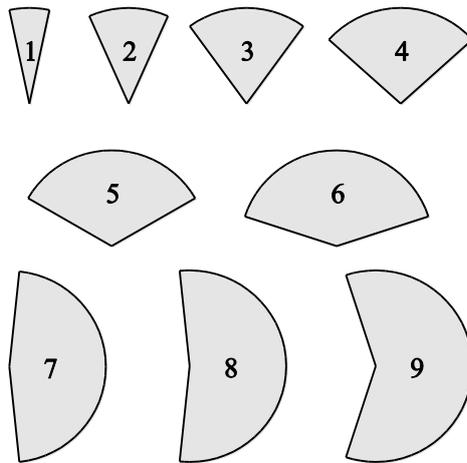
將「X」落在左上角是合乎直覺的想法，但這樣反讓先玩者取得雙頭蛇。由上述分析知道「圈叉遊戲雖然容易平手，但是先玩者若從角落出發，反而容易誘導對手犯錯，取得雙頭蛇，進而得勝；反之若由正中央出發，反而容易平手收場，原因在對手提高了警覺性。」圈叉遊戲是第一個製作在電腦上的益智遊戲，在 1952 年，EDSAC 電腦就有圈叉遊戲了。

將洛書的邊去掉就成為井字上填有 1 到 9 數字的圖形，且行、列與對角線的和總是 15。當我們將這個圖形與一盤圈叉遊戲對照時，不難發現：連線的三個「○」所對應的數字和 8+1+6 等於 15。因此，可以將圈叉遊戲想成從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 的九個數字中輪流取數，誰先取到有三個數字的和為 15 者勝（和為 15 代表連線的意思）。

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| x | | o |
| | x | x |
| o | o | o |

有了這種洛書與圈叉遊戲的對照，該是科學家的餘興節目登場的時候了，這裡要介紹一道乍看難以捉摸，但從另一個方向切入變得容易得多的遊戲。有編號1、2、3、...、9的九塊扇形蛋糕，如下圖所示，1號蛋糕的頂角為24度，2號有48度，3號是72度，依此類推，也就是說，最小的1號蛋糕只包含1片蛋糕，...，而最大的9號蛋糕由9片蛋糕組成：



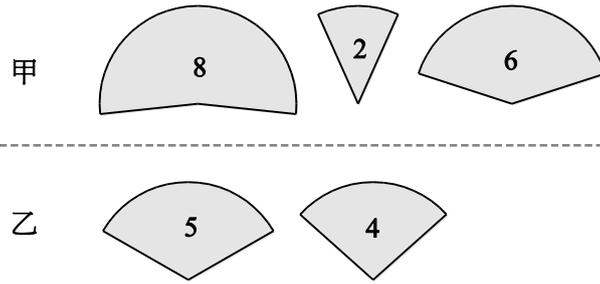
現在甲、乙兩人各擁有一個空的圓形蛋糕拼盤，其半徑與每塊蛋糕半徑一致，如下圖所示：



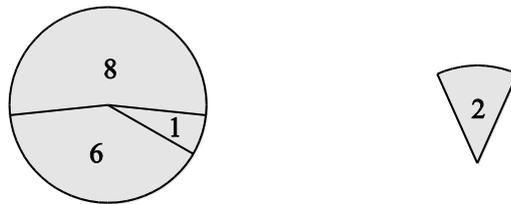
填蛋糕圓盤遊戲的規則為

- (1) 甲、乙輪流從九塊蛋糕中挑選蛋糕，每次挑選一塊，挑過的不能再挑。
- (2) 遊戲至多進行四回合，在此情形下，每人各選了四塊蛋糕，僅剩一塊蛋糕沒被選中。
- (3) 當某人所挑選的蛋糕中，可以拿出三塊，而且剛好填滿他的空圓盤，此人就是勝利者。

三塊蛋糕剛好可以填滿空圓盤是指「這三塊蛋糕總共有15片」的意思。讓我們舉例說明一下，下圖是甲、乙玩填蛋糕圓盤遊戲的前三回合：



遊戲進行到第三輪，當甲選了6片蛋糕時，雖然甲的三塊蛋糕和 $8+2+6$ 不是15片，無法拼進空的圓盤，但是甲已經勝券在握了。原因是乙無法選6片的蛋糕（甲剛剛選走）來湊成15片，而進入第四輪後，甲可以選1片或7片都可以湊成三塊共15片的圓形蛋糕盤。舉例來說，如果乙在第三輪選7片的蛋糕，那麼甲在接下來選1片蛋糕，這樣8、6及1片這三塊蛋糕剛好是15片，甲就是勝利者，他的拼盤如下圖所示，其中2片蛋糕是剩下的：



在輪流拿取蛋糕塊的過程中，如果你想要的蛋糕塊已經被拿走，必須找到另一種組合方式，用你已經選擇的蛋糕塊和剩下的蛋糕塊，湊成15片。但一定要用正好三塊來填滿蛋糕盤，用8片及7片的兩塊蛋糕來填不算贏，也不能用1、2、4、8片的四塊來組合。

從不同的角度看問題，原來難解的填蛋糕圓盤遊戲或許有可能突然迎刃而解，想想看，洛書與圈叉遊戲可以幫上忙嗎？將洛書上的九個數字想成九塊蛋糕的片數，並填在井字的九個位置上，如下圖的左圖所示，再將前面甲、乙兩人拿取蛋糕塊的過程以畫圈叉的形式呈現在這個綜合的圖形上，如下圖的右圖所示：

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|--------------|--------------|---|
| 4 | 9 | ② |
| 3 | 5 | 7 |
| ⑧ | 1 | ⑥ |

從圖形中發現，乙在第二輪選取角落的4片蛋糕是失敗關鍵，這時甲僅需在第三輪選6片蛋糕就製造出雙頭蛇，並在第四輪連線取勝，完成三塊拼盤。

在圈叉遊戲中，占正中央的戰術並不高明，對手只需從角落防守就會平手；但是，於填蛋糕圓盤遊戲中，先拿5片蛋糕，只要對手沒拿2、4、6、8片蛋糕，

可就輸了。這說明「填蛋糕圓盤遊戲」是包裝得比較密不透風的遊戲。當然，只要雙方都推敲無誤，填蛋糕圓盤遊戲最終還是會平手的，也就是說，無人可以拿出三塊蛋糕來填滿圓盤。

心中有「井字」，腦裡有「洛書」，是玩「填蛋糕圓盤遊戲」最大勝算的依靠。這遊戲的原始來源是臉譜出版的科普書籍《桑老師的瘋狂數學課》，並經過本人適當的取捨、修改、增補與串連。原書著者馬庫斯·杜·桑托伊是牛津大學數學教授，《週日獨立報》評選為當今英國最重要的科學家之一，有「數學界的莫札特」之譽。桑托伊的科普講座不僅在英國，甚至於全世界都是赫赫有名。最後，感謝洪萬生老師（師大數學系退休教授）推薦本人閱讀此書，學生陳昱達對圈叉遊戲戰術的指導及陳裕錫老師完成填蛋糕圓盤遊戲的 Flash 版。