

阿基米德的胃痛拼圖…數大就是美

數缺形時少直覺，形少數時難入微。

西元前 287 年，阿基米德出生在古希臘西西里島東南端的敘拉古。在當時古希臘的輝煌文化已經逐漸衰退，經濟、文化中心逐漸轉移到埃及的亞歷山卓城。9 歲時，阿基米德到埃及的亞歷山卓城唸書，在這裡跟隨許多著名的數學家學習，包括有名的幾何學大師—歐幾里得。在經過許多年的求學歷程後，回到故鄉—敘拉古。據說阿基米德經常為了研究而廢寢忘食，走進他的住處，隨處可見數字和方程式，地上則是畫滿了各式各樣的圖形，牆上與桌上也無法倖免，都成了他的計算板，由此可知他旺盛的研究精神。

阿基米德的科學以惡作劇、謎題及走捷徑而聞名，他也喜歡答案超大的數學問題，其中有兩個問題跟我們這個時代有密切的關連，《牛群問題》是上世紀中葉才得到完整的答案，而《胃痛拼圖》卻是上世紀末才被重新挖掘出來的遊戲。在阿基米德死後的 2200 多年的今日，我們有幸與這兩個數大就是美的問題邂逅，算是緣分也是福氣。

根據傳說，西元前 3 世紀時，阿波羅尼亞斯 (Apollonius) 找到一個圓周率的近似值，比阿基米德的結果還要準確，而且，還寫了一篇批評阿基米德的文章，使得他很生氣。為了報復，阿基米德設計了一道計算題，必須計算到相當大的數字才能找到答案，在寫給當時亞歷山卓城圖書館館長艾拉塔斯西尼茲 (Eratosthenes) 的一封信中，提出他的牛群問題。到底阿基米德有沒有寫這封信，以及他是不是牛群問題的發明人，仍是一個疑問，倒是牛群問題被流傳下來了，這是阿基米德做過最遊戲式的計算。

朋友，為了計算太陽神的牛隻有多少，假如你擁有智慧，你還必須勤快，西西里島平原上有多少隻牛在吃草，特麗納西亞島上有四種顏色的牛，即乳白、黑、黃色和花紋，每一種中公牛比母牛多，並滿足下列九個條件：

1. 白公牛數 = 黃公牛數 + $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ 黑公牛數；
2. 黑公牛數 = 黃公牛數 + $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ 花公牛數；
3. 花公牛數 = 黃公牛數 + $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ 白公牛數；
4. 白母牛數 = $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ 黑牛數；

5. 黑母牛數 = $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ 花牛數；
6. 花母牛數 = $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ 黃牛數；
7. 黃母牛數 = $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ 白牛數；
8. 白公牛數 + 黑公牛數 = 平方數；
9. 花公牛數 + 黃公牛數 = 三角形數。

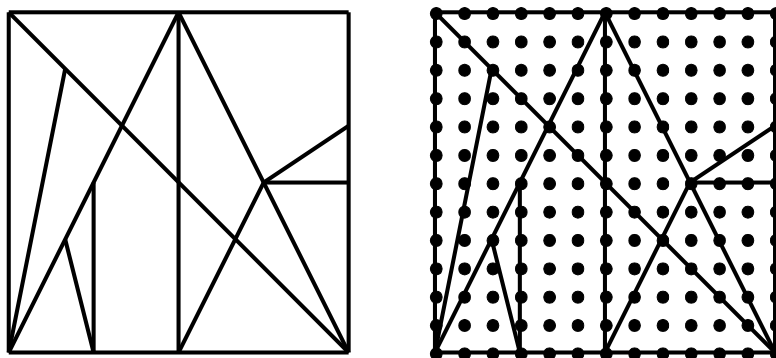
要證明滿足前 7 個約束條件的最小牛群總數是 50,389,082 並不難，但加上最後兩個條件以後就不同了。一直到 1880 年才有重大的進展，這一年，德國人安索爾 (A. Amthor) 證明最小牛群的總數，是一個由 7766 開頭的 206,545 位數字，真是個天文數字，全世界有這麼多牛嗎？牛群問題有 10 個未知數 (為何 10 個呢？想想看)，但只有 9 個方程式，根據數學經驗，答案可能有許多組，甚至無窮多組。

在 1981 年 7 月的《科學的美國人》雜誌透露，最近勞倫斯國家實驗室的尼爾遜，利用這個問題來測驗該實驗室那部新計算機克雷 (CRAY) 一號的性能，又把答案找出，並把結果發表在最新一期的《趣味數學》季刊上。他表示，用克雷一號只花了約 10 分鐘。由於時間太短，不足以測驗計算機的性能，所以又繼續用同一程式找出 5 個新的解答，最大的數目超過 100 萬位數。

《牛群問題》是上個世紀末才被解決的大數字問題，很難相信阿基米德本身可以解這問題。接下來要介紹的也是上個世紀末才被重新找到的阿基米德問題《胃痛拼圖》，這失蹤 2000 多年的拼圖遊戲被重新找到的過程是既有趣又離奇。

在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。在 1998 年 10 月 30 日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書，以美金 200 萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，布滿燒焦、水漬、發霉的痕跡。然而在祈禱文的下方，隱約可看見幾乎被擦拭掉的、傳抄自古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰·麥隆納斯於西元 1229 年 4 月 14 日抄寫，想在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後，重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯將祈禱文書寫在再生羊皮紙上。透過高科技的掃描，祈禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛拼圖》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且

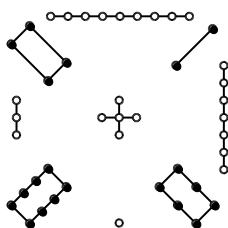
附了一個正方形的插圖：



阿基米德的《胃痛拼圖》

在這再生羊皮書上，阿基米德所給的答案是 17152 種！這答案經過電腦科學家比爾·卡特勒驗證無誤，卡特勒也指出：將旋轉或者鏡射視為同一種的話，仍然有 536 種不同的拼法。事實上，幾位鼎鼎有名的數學家，如隆·格拉罕及金芙蓉夫婦檔，都只靠紙與筆就算出這個數字。

相傳在西元前 23 世紀大禹治水的時候，在黃河支流洛水中，浮現出一隻大烏龜，背甲上有 9 種花點的圖案，人們將圖案中的花點數了一下，竟驚奇地發現 9 種花點數正巧是 1~9 這 9 數，各數位置的排列也相當奇妙，後來人們稱這個圖案為洛書。

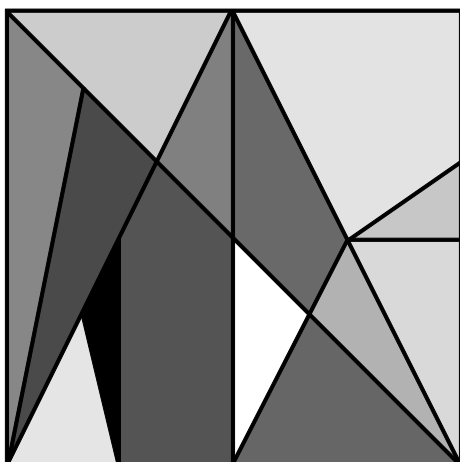


洛書給出的 9 個數所排成的方陣具有絕妙的性質，橫的 3 行、縱的 3 列以及兩對角線上各自的數字之和都是 15。人們因它的性質之獨特而大感興趣，對其進行了多方面的研究。中國把這「縱橫圖」或西方稱為「幻方」的精巧結構當作組合數學的濫觴。再生羊皮書的出現，西方似乎也把組合數學的歷史往前推算到阿基米德的《胃痛拼圖》。

洛書、幻方都是組合學古老的例子，如今加入了胃痛拼圖這道啟蒙例子，讓組合學的內涵更多采多姿。從這些例子不難發現，組合學就是在處理離散的情形；而今日的電腦也是以處理離散情形為核心。計算機的使用讓組合學研究一日千里，同樣的，組合學的訓練也使計算機軟體產業得到好的基礎。

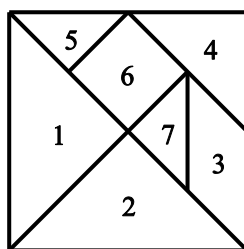
現在讓我們動手做一道練習吧！拿剪刀或美工刀將阿基米德的胃痛拼圖沿

著黑線剪開，讓它變成 14 塊，然後將這 14 塊填滿底下阿基米德的正方形圖片，並要求轉動後的縫隙不得與原來的圖形一樣：



拼成正方形的方法有 17152 種，如果一位老師每天到學校的第一件事情就是拼出新的正方形，那麼在他退休時，也無法完成所有的拼法。這是否意味著隨便拼都會成功呢？試試看吧！

阿基米德的羊皮紙手稿，由丹麥學者海伯格於 1906 年在今之伊斯坦堡發現，1920 年再度失蹤，1998 年出現在紐約佳士得拍賣會上。該次拍賣，希臘代表競標至美金 190 萬才退出，而最後的得標者，是一位不願意透露姓名的美國收藏家，這位收藏家說，將來學者可以借閱該手稿。阿基米德的 14 塊拼圖，除了拼成正方形的遊戲之外，也可以玩類似中國七巧板的遊戲，拼各種動物。

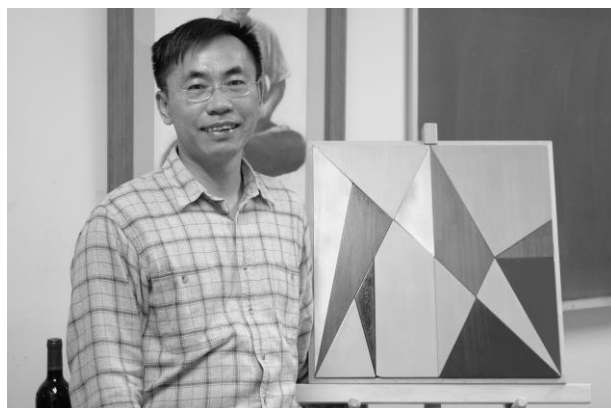


七巧板

胃痛拼圖最早出現在中世紀的阿拉伯文譯本上，大家都把它視為類似中國七巧板的遊戲，直到再生羊皮書的出現，才了解阿基米德是在研究拼成正方形的組合方法數，並不是拼圖遊戲或是七巧板之類的益智遊戲。也因為這樣，阿基米德也成為西方組合學的老祖先。

胃痛拼圖是滑板遊戲的一種，可以用木板切割出精確的 14 塊，然後在正方形盒子內擺放，下圖是一個邊長 60 公分大小的木頭材質胃痛拼圖。從圖片中不難想像，把五顏六色的木板所拼出來的胃痛拼圖擺在辦公室或者住家牆壁上，

肯定是不錯的裝飾。



在尋找木工製作胃痛拼圖的過程，也有一段插曲，一般的木工師傅會告訴你「從正方形木板用鋸子切割，因為每鋸一段，都會產生 0.2 釐米的耗損，等 14 片都鋸完，再拼回去，肯定跟正方形有很大的落差，這樣的拼圖你不會滿意，所以沒辦法接這生意」，講究一點的師傅會說「這拼圖必須 14 塊逐一切割，才能在拼的過程完全密合，但這樣既耗木材，又浪費時間，價錢會很高，你應該不會接受」。這些都反映出幾何學中「尺規作圖」的重要性，國內木工師傅顯然在這方面的素養不是很夠，這恐怕是我國中學幾何教育一道待克服的問題。但是，也有例外，在景美女中教授生活科技的施妙佳老師，在聽完胃痛拼圖後，把它當成每位高二學生的一件工藝作品，他們也畫出精密準確的切割圖，沒有浪費太多材料，而且容易切割，完成之後的密合也很棒。

西元 1 世紀的希臘傳記作家普盧塔克描述阿基米德生前的最後一刻「他獨自一人，靠著圖形的輔助，正要求解問題，而把整個心思及雙眼，貫注在他的研究之上。他沒注意到羅馬人的入侵，或城市的淪陷。突然來了一名士兵，命令他隨同去見馬歇勒斯，他拒絕前往，要士兵等他解出問題，完成證明。士兵受不了而被激怒，抽出他的劍把阿基米德殺死了」。

在此要感謝三位對這篇文章有幫助的人，關於牛群問題，感謝林克瀛教授在《科學月刊》上的一篇文章，刊在 1982 年 3 月，第 147 期。關於胃痛拼圖，主要參考來源是天下文化出版的科普書籍《阿基米德寶典—失落的羊皮書》，由曹亮吉教授翻譯。在一次高雄的演講會上，曹教授對該書的內容及阿基米德的作品對我做了相當清楚的單獨講解，謝謝他的解釋。關於阿基米德的故事，大都是以少量的史實，加上大量的傳奇故事，所揉合而成的綜合體，其真實性，有賴讀者自行判斷。但是值得注意的是：阿基米德能在 22 個世紀以前，用十分有限的工具做出那麼多的成果，光是這點就值得把阿基米德邀請到我們的課堂裡，使講課內容更加豐富，並能擴大啟蒙學生的功效。關於阿基米德的作品也可以參考天下文化出版的《阿基米德幹了什麼好事！》（斯坦著，陳可崗譯）。

同時，也感謝我的研究生陳裕錫，他花了整個暑假的時間完成了胃痛拼圖的 Flash 版，原始程式長達 40 來頁，各位如果有這個免費的版本，也應該要感謝他的付出。最後，附上胃痛拼圖眾多解答中的一種，也是個人覺得很漂亮的一種拼法：

