編輯室報告

創新突破、追求卓越

《數學新天地》由師大數學系許志農教授精心策劃，這一期的「本期焦點」，將介紹由許教授所帶領的數學專業團隊共同編寫的〈95 學年度龍騰版數學教科書特色〉。文中針對龍騰版 95 學年度的數學教科書作了詳盡的介紹，精彩內容如：淺顯易懂、段落分明的課文陳述；因應九年一貫學生程度所設計的例題、習題、課前引言；模擬大考中心衡量標準、檢測學生學習概念所設計的章末總習題；許教授私下收藏，適合中學生的有趣、易學、易記之數學試題；符合各章節立體、反應該章主題意涵的圖形設計……等。 全新推出的龍騰 95 數學教科書，是一套學生容易學習、老師教學輕鬆上手的教材，期讓學習本數學教材的老師及學生，能因此當現代的阿基米德為樂。

除了「本期焦點」之外，本期精選文章簡介如下：

承接上一期〈學習數學應注意的關卡〉，吳志揚教授將與我們分享學習基本幾何圖形的概念以及方程式、不等式與多項式這三者的巧妙關係，只要你能對他們的關聯加以融會貫通，便能體會其中之美。

『師父中的師父』專欄〈閒聊機率與統計〉中，許志農教授利用銅板以及骰子的變化，由生活中帶入機率問題的運用。你知道圖書館的書籍，同一本書被翻閱最多次的頁數也跟機率以及對數有關嗎？就讓許教授帶您體驗生活中常遇見的機率問題！

在進入高中的第一個學期，學生會大量接觸到邏輯的概念，身為數學教師的您，會用什麼方法幫助學生學習呢？許秀聰老師的〈學理構念的再脈落化：學習前導架構〉將幫助您以及您的學生如何更加了解自己的邏輯概念。

在數學課本「空間中的平面與直線」的章節中，我們經常使用「平面族定理」來解題，但許多人對它只是知其然，而不知其所以然。蘇俊鴻老師的〈用向量來看平面族定理〉，透過向量觀點的切入，可以為我們提供理解的途徑。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：吳淑芬
副總編輯：孫慧璟
執行編輯：葉瑞梅、李彥宜
美術編輯：林儀婷

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地 址：248 台北縣五股鄉五權七路 1 號
電 話：(02)2299-9063
傳 真：(02)2299-0197
創 刊 日：2002/10/1
出 刊 日：2006/4/1
網 址：http://www.lungteng.com.tw

目次 CONTENTS

學習數學應注意的關卡(三)

◎吳志揚／中正大學數學系

在上兩篇文章中，我們探討了一些學習數學應注意的基本關卡，如計算能力與對小數、分數與比例、未知數及簡單圖表的掌握等等。對一個國、高中生來說，語文能力、理解力與記憶力的成熟度是成長最迅速的年齡，並已成熟到可用來進行較深入的分析、推理和對資料的整理與判讀。數學的學習隨著學生心智能力的成長，在廣度、深度與成熟度各方面的要求也必須隨之加重與加強。就如前文所說的，數學的廣度指的是數學知識與概念的涵蓋面向，而數學深度指的是對數學知識與概念了解的深入度，成熟度表示一個學生對數學知識、概念與技巧掌握的程度。

到了國、高中以上時，數學課程的廣度、深度與成熟度都已進入筆者所說的「中級階段」，在這個階段所需的語文能力，除了閱讀能力外、寫作的表達能力與邏輯推理，敘述能力所扮演的角色也隨著年級愈高愈來得重要。這是因為數學問題的深度已較為提高，回答問題時敘述的複雜度也較高。因此我們願意再一次提醒大家，多注意學生聽、說、讀、寫的語文能力。而事實上，不只是中文的語文能力，到了大學時，英語的能力也是一樣很重要的，這是因為現代的數學觀念絕大部分都是從西方先發展出來的，也因此有時必須用英文較能掌握該數學詞彙的意涵。

在這篇短文中，我們將進一步討論三角形、平行線與圓，方程式、不等式與多項式，以及幾何與代數的兩面性，並探討學習數學是否要背，也就是理解與記憶孰重的問題。這些主題將涵蓋國、高中部分的課程。

第九關：三角形、平行線與圓

在學習數學的過程中，基本幾何圖形與概念一直都扮演著重要的角色，其中又以三角形、平行線與圓最為顯著。這是因為三角形的組合性高，而其面積的計算也不那麼困難，與平行線的性質相結合更能讓我們能夠充分地掌握方向的改變與圖形的移動。因為三角形的重要性很大，我們從國小到高中的幾何課程都一直在學習它的一般性質。舉例來說，直角三角形的畢式定理就是每個國中生必須熟知的。到高中時，我們進一步與圓的性質相結合，並學會正弦定律、餘弦定律與海龍公式等等，以進一步了解三角形的角、邊與面積的關係。這些定律與公式對測量來說都是非常有用的。由三角形衍生而得的三角函數，不但對了解三角形本身很重要，未來在其他領域（如物理等）的應用也是不可或缺的工具。

學習三角形、平行線與圓等單元，首先必須加強對角度、長度的認知，並培養對圖形移動、放大與縮小的感覺。一些基本而重要的概念與結果也必須熟知。舉例來說，三角形內角和等於 180 度，與平行線有關的角度問題，三角形的重心、內心、外心與垂心，以及與之息息相關的一些定律與公式，如何判定三角形的全等，如何利用三角形的全等與相似三角形原理來計算所要的

角度、邊長與面積。

又譬如，如果兩個三角形三邊的邊長相等，那麼這兩個三角形就全等。全等是指這兩個三角形可以經由平移、旋轉或反轉而完全重合在一起。這就指出了如果三角形三邊的邊長一給定，我們就應該可以算出這個三角形的面積與各個角的角度等等，也因此正弦定律、餘弦定律與海龍公式就自然而然地產生了。

在處理平面幾何問題中，最困擾學生的是如何找補助線了。有幾何圖形天分的學生一學就會，做練習時也能自己觸類旁通。較無幾何圖形感覺的學生常常理不出頭緒。雖說情形是如此，但畫補助線總應該也有一些基本方法吧。其實，畫補助線應把握兩個要點：第一、畫所需角或邊的平行線；第二、補足構成所需三角形的各邊。掌握這兩個要點，並多加練習，相信對較無幾何圖形感覺的學生也會很有幫助。

在現代的影像處理與幾何學中，利用三角形來對複雜圖形作三角分割是了解該複雜幾何圖形內在性質的一種有用的建構方法。這種三角分割建構法，對現代通訊、數位影像的處理更是重要無比。因為我們在電腦動畫上所看到的影像，不管是人體、汽車或其他東西，也不管是平面圖形或立體圖形，他們都可由很多細小的三角形（三角網格）所建構成的。只要所用的三角形夠小，那麼圖形看起來就會相當平滑。有了這樣的認知後，相信大家對學習一些基本的幾何圖形如三角形、平行線與圓等的重要性就更能了解了。

第十關：方程式、不等式與多項式

在第六關未知數的初體驗中，很多問題只要引進未知數來處理，我們就可以用「直接」的方法來思考，而不用去找一些巧妙的「間接」解法。一般來說，引進未知數來處理問題有三個步驟：第一、設定適當的未知數；第二、根據題意找出未知數的可能關係式，這些關係式不外乎是方程式或不等式所組成的方程組；第三、設法解方程組，並找出這些未知數。使用未知數處理問題時，困難處在於：如何根據不同的問題設定適當的未知數、如何有效地找出未知數之間足夠的關係式以及如何解方程組。從小學到高中的數學課程中，學習解方程組就落在方程式、不等式與多項式各個單元了。

方程式、不等式與多項式三者的關聯性是非常高的，往往了解其中之一，就等於了解其他兩項。不過，有些學生對方程式、不等式與多項式之間的關聯並不熟悉，以致於不能相互融會貫通。清楚了他們之間的關聯後，我們就可以花較多的時間來學習如何解方程式或方程組的方法與理論。

其實到現在為止，如何解方程組依然是件不容易的事。一元一次方程式或不等式是簡單的，一元二次方程式可用「配方法」來處理，並得到公式解。有時也可用「交叉相乘法」做因式分解來得到答案。一元三次、四次方程式也有「卡當公式」。一般來說，五次以上的方程式並沒有公式解。二元以上的一次方程組可用「消去法」來處理，二元二次方程組也可嘗試用「消去法」與「配方法」來找答案，但這已經讓很多學生頭疼了。多元多次方程組就愈來愈困難，而必須借助電腦來做數值計算了。也因此，筆者常說，若在考試中出現必須解一元三次以上的方程式時，往往必有一根是顯而易見的。要不然，可能甚至連老師都不太容易解得出來。

如果所要求的根是整數、有理數或其他特別的數，那麼處理的方法也會有所不同，學生只要多練習幾次，就能了解它的要領。另外，根與係數的關聯更必須加以了解，求根與因式分解是一體的兩面，對有些學生來說，往往因不能深入的了解而感到困惑。

第十一關：形與數－坐標系

幾何圖形與數字計算是數學的兩大課題，這兩者乍看似乎很不一樣，但其實它們可以說是一體的兩面。我們的老祖宗就會設定尺度來量物體的長度。也就是將物體的長度轉換成數字。這樣的想法在幾何概念中是非常普遍的，舉凡長度、面積、體積與角度等等皆是。然而，要將一個幾何圖形，如直線、圓，給予數字化，或者將方程式幾何化，都不是件容易的事。這件事的克服與否，筆者以為這正是影響東西方數學與科學發展的重要分水嶺。東方人終究沒能自行克服這個困難，以致於後來科學發展遠遠地落後西方文明。那麼西方人是如何做到的呢？這關鍵的發明即是笛卡兒的直角坐標系統。

國中生利用數對的觀念將 (x, y) 標示在附有直角坐標系統的平面上，亦即一個數對對應到直角坐標系上的一個點，同時這個直角坐標系統也把平面上的點給數對化了。這個奇妙的方法就把幾何圖形代數化，而同時也把二元方程式給幾何化了。更可貴的是這個方法，對一般的學生學起來一點都不困難，並且覺得這個直角坐標系統很自然，一點都不神奇。筆者曾經提出「SUN 法則」來判別一個數學概念、發明或理論的好壞高下。「SUN 法則」指的是「簡單 Simple」、「實用 Useful」與「自然 Natural」。笛卡兒的直角坐標系統即是符合「SUN 法則」的最佳典範。

既然笛卡兒的直角坐標系統是連接幾何與代數的橋樑，學習將一些幾何圖形表現在坐標平面上是非常重要的練習。舉例來說，直線、圓、橢圓、拋物線與雙曲線如何用方程式表述；反過來說，二元一次或二次方程式又代表哪些幾何圖形？其他如點與點、點與線或線與線之間的距離如何計算，圖形的對稱、平移與旋轉又如何描述與處理？

培養學生了解幾何與代數是一體兩面的觀點，對學生數學能力的提升是非常重要的。事實上，對數學問題的處理，幾何觀點往往提供具有創意的方向，而代數計算才是落實想法的有效工具。也因此筆者常說：「幾何直觀必須靠代數計算來驗證」。

第十二關：理解與記憶

大家都說學數學要理解，不要用背的？真的是這樣嗎？「學數學要理解」這句話是什麼意思呢？筆者常開玩笑說：世界上最難理解的辭彙，就是「理解」兩字。因為大家對「理解」的理解也不一樣。所以說，與其花時間討論如何「理解」數學，不如反過來問：學習數學是否需要背很多東西呢？這其實和你學習數學的方式有很大的關聯。

筆者以為學習一個新的數學單元正確的步驟大致如下：首先應初步了解要探討的實際問題或抽象概念；再來是建構該單元的基本知識、方法與技巧，並做一些標準的例題和基本的練習；最後是學習如何利用這些已經學會的概念、知識、方法與技巧來處理一些延伸性的問題，並加以應用，以便磨練自己利用基本知識處理問題的能力與增廣見聞。其實這三個步驟也不是全然一定是照這個順序的，有時對該單元的基本知識、方法與技巧有了了解，對所要探討的實際問題或抽象概念才會有進一步的認識；有時學會處理一些延伸性的問題，才對該單元的基本知識、方法與技巧有更多、更深一層的體會。而在這三個步驟中，適當的理解與記憶都是必須的，而理解愈多，則記憶愈少。

舉例來說，前面我們談到，如果兩個三角形三邊的邊長相等，那麼這兩個三角形就全等。這就說明了如果三角形三邊的邊長一給定，我們就應該可以算出這個三角形的面積與各個角的角度

等等，也因此正弦定律、餘弦定律與海龍公式就自然而然地產生。這就告訴我們，如果我們熟知這些公式，那麼對處理三角形的角、邊與面積的問題就相當容易了。反過來說，如果我們不記得這些公式，那麼對處理三角形的角、邊與面積的問題就相當大費周章了，有時更不知如何下手。這例子對於學習一個數學單元需要背哪些結果或公式，相信對學生的困擾一定有所啟發。

結語

學習數學的歷程，就像人生一樣，人人不同。有人一路走來，滿是歡喜、信心滿滿而有成就感。有人從小學起，就一直充滿挫折，上了國中後，數學考試就是頭痛的時間，數學成績永遠是成績單上最紅的一科，這樣的情況可能要持續到高中畢業。十二年折磨下來，誰還會喜歡數學呢？雖然不喜歡數學，但若是連如何使用一些基本的數學都不熟悉，那可說是數學教育的失敗。大家試想：如果讓孩子們去學一項技能，如修車、水電或烹飪等，相信不用花十二年也必然具有一定的水準。如果讓小朋友從小花那麼多時間去學數學，可是得到的經驗卻大多是負面的，並且即使是數學成績好的學生，經十二年的訓練後，心中依然對「數學有甚麼用」存著很大的問號，這樣的數學教育一定不是成功的。這個情況是我們數學教育工作者必須加以正視並深切反省的。

當然，「為什麼要學數學」對不同的人來說有不同的理由。對很多學生來說，學數學的最大理由是因為它是最重要的主科之一，並且它是升學考試必考的科目。因此，數學成績好的學生在升學時就相對有利了。但站在社會、國家或父母的角度來看，我們希望孩子學數學可以訓練思考，並且因為數學是很有效的分析工具，對孩子未來的工作發展會有幫助。也因此我們希望孩子學數學不是只是學習數字的計算處理及研究幾何圖形與表格的工作，同時也希望孩子學習思考、分析與歸納的方法。經由探討數學理論及利用它來了解、處理各種應用問題的經驗，可以讓我們更有效地理解數學中各種抽象的觀念、並學會掌握各種數學知識以便用來處理未來將面對的實際問題。要訓練孩子逐步學會這些數學知識與能力，必須要通過很多關卡。每一個關卡都有其必須注意的地方，對這些地方多一分了解，學習起來就多一分輕鬆，並且也多一分自信。

附記：非常感謝嘉義市北興國中吳冠逸同學對本文所提出的寶貴意見。

第三講：

閒聊機率與統計……

與其請問上帝是否擲骰子，不如研究上帝怎麼擲骰子

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

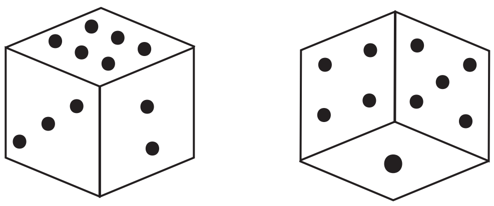
數學經文

頭腦是一切不真實的集合，它總是思考著讓所有的事情都完美。但人生幾時完美呢？是故，每當頭腦被大量使用，想做完美的事時，它總是站在選擇錯誤的那一面，因為它選擇了完美的冒牌貨或替代品……是故或是沒稜沒角，像球或圓一樣的圓滑。只有你相信生命只能美麗，沒辦法完美，那頭腦的選擇才會是正確的選擇。當你達到「不用選擇是唯一且最好的選擇」時，你就進入人生這粒骰子的最高境界了。

「十賭九輸，十墓九空」，雖然是兩句成語，但它們反映了人們貪婪的天性。所以很多遊戲，它們發生的機率並不如想像中那樣簡單。如何巧妙地發現它們，又科學地計算它們，確實是對人類的一大挑戰。

問題　有甲、乙兩粒均勻的正四面體骰子，在甲骰子的四面分別寫上 $1, 2, 2, 3$ 四個數字；在乙骰子的四面分別寫上 $1, 3, 3, 5$ 四個數字。將甲、乙兩粒骰子同時投擲時，其點數和的機率分布為何？（考慮壓在桌面上那一面的數字和）

丟一枚公正的銅板，不是正面就是反面朝上，而且其機率都一樣是 $\frac{1}{2}$ ；投擲一粒均勻的骰子（正立方體），也只會出現六種情況，點數 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 朝上的機率都一樣是 $\frac{1}{6}$ 。



這兩個結果可以從多次的實驗得到驗證，不需要求神問卜，請問上帝。日常生活中，類似這樣的機率活動有許多，如何得到各種情況發生的機率分布是人們很感興趣的一件事。與其求見上帝，問他這機率分布是多少，不如善用手邊的數學知識，親手研究這機率分布來得實際。

1 利用多項式的乘法運算擲骰子……均勻骰子

將甲、乙兩粒骰子同時投擲，那麼甲、乙兩粒骰子的點數和分布次數可以由底下的多項式乘法看出

$$(x^1+x^2+x^2+x^3)(x^1+x^3+x^3+x^5)$$
$$=(x^1+2x^2+x^3)(x^1+2x^3+x^5)$$
$$=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8.$$

同時投擲甲、乙兩粒骰子的樣本空間有 $4\times4=16$ 種，而點數和的分布次數可由上述多項式的係數決定。例如點數和為 4 的情況有 3 種，即(甲, 乙) = (1 , 3), (1 , 3), (3 , 1)三種，它們分別對應到上述多項式的乘積展開式

$$x^1\cdot x^3+x^1\cdot x^3+x^3\cdot x^1=3x^4.$$

所以同時投擲甲、乙兩粒骰子的點數和機率表為

點數和	2	3	4	5	6	7	8
機率	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

☒

練習 1　如果甲、乙兩粒均勻的正四面體骰子的四個面都是寫上 1, 2, 3, 4 四個數字，那麼將甲、乙兩粒骰子同時投擲時，其點數和的機率分布為何？當你完成此問題時，請將答案與本章題目的答案比較一下，你的發現是什麼呢？對於你的發現，你可以用多項式的性質，講得更深入嗎？

練習 2　有甲、乙兩粒均勻的正六面體骰子，在甲骰子的六面分別寫上 1, 3, 4, 5, 6, 8 六個數字；在乙骰子的六面分別寫上 1, 2, 2, 3, 3, 4 六個數字。將甲、乙兩粒骰子同時投擲時，其點數和的機率分布為何？

2 利用二項式定理擲骰子……楊輝三角

二項式定理是說 $(x+y)^n$ 的展開式可以寫成 $(x+y)^n=C_0^nx^ny^0+C_1^nx^{n-1}y^1+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots+C_{n-1}^nx^1y^{n-1}+C_n^nx^0y^n$ 的形式。這個恆等式的係數 $C_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$。若將這些係數依 n 值的大小，由上而下；依 k 值的大小，從左至右排列，則可以排列成如下的楊輝三角：

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&&\\
&&&1&&1&&&\\
&&1&&2&&1&&\\
&1&&3&&3&&1&\\
1&&4&&6&&4&&1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&C_0^0&&&&\\
&&&C_0^1&&C_1^1&&&\\
&&C_0^2&&C_1^2&&C_2^2&&\\
&C_0^3&&C_1^3&&C_2^3&&C_3^3&\\
C_0^4&&C_1^4&&C_2^4&&C_3^4&&C_4^4
\end{array}$$

▲〈楊輝三角對照表〉

由二項式定理知道：$(x+y)^{n+1}$ 展開式中 $x^{(n+1)-r}y^r$ 項的係數為 C_r^{n+1}；而把 $(x+y)^{n+1}$ 寫成 $(x+y)^n(x+y)$ 的乘積，將 $(x+y)^n$ 展開並計算其與 $(x+y)$ 的乘積，得

$$(\cdots+C_r^nx^{n-r}y^r+C_{r-1}^nx^{n+1-r}y^{r-1}+\cdots)(x+y)$$
$$=\cdots+(C_r^n+C_{r-1}^n)x^{n+1-r}y^r+\cdots.$$

因此，二項式定理的係數滿足

$$C_r^{n+1}=C_r^n+C_{r-1}^n,$$

也就是說，楊輝三角上的任一個數等於其上方左、右兩數的和。

二項式定理（代數形式）與楊輝三角（幾何模型）被廣泛使用來解釋許多數學問題，接下來舉兩個例子作說明：

① （彈珠檯）如果彈珠檯是一個三角形，當彈珠從頂點下降一格時，有一半的機率向右走、另一半的機率會向左走，那麼該如何描述彈珠的落點分布呢？楊輝三角就是一個很好的模型：將三角形的彈珠檯想成楊輝三角，當你投下 1 粒彈珠時，楊輝三角的第 1 列的數字 1 就是它的分布；當你投下 2 粒彈珠時，楊輝三角的第 2 列的數字 1, 1 告訴你，它的分布是左、右各 1 粒；當你投下 4 粒彈珠時，楊輝三角的第 3 列的數字 1, 2, 1 告訴你，它的分布是左、右各 1 粒，中間有 2 粒，也就是說，彈珠跑到左、右兩側的機率分別是 $\frac{1}{4}$ ，而落在正中央的機率是 $\frac{1}{2}$ ；依此類推，當你投下 16 粒彈珠時，楊輝三角的第 5 列的數字 1, 4, 6, 4, 1 告訴你，應該有 6 粒彈珠會落在正中央。從這過程發現，楊輝三角是解釋彈珠檯遊戲的最佳幾何模型。

② （分割線段）將一條一公尺長的線段，依 1：3 的比例分割成兩條小線段，再將這兩條小線段，分別依 1：3 的比例各分割成兩條小線段，依此類推，在五次分割之後，會製造出 32 條小線段。你如何知道這 32 條小線段的長度及同一長度的線段各幾條呢？拜二項式定理所賜，可以利用

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^5 = C_0^5\frac{1}{4^5} + C_1^5\frac{3^1}{4^5} + C_2^5\frac{3^2}{4^5} + C_3^5\frac{3^3}{4^5} + C_4^5\frac{3^4}{4^5} + C_5^5\frac{3^5}{4^5}.$$

展開式中的每一項與該項係數來解釋這問題。將展開式中係數算出，得

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^5 = 1\times\frac{1}{4^5} + 5\times\frac{3^1}{4^5} + 10\times\frac{3^2}{4^5} + 10\times\frac{3^3}{4^5} + 5\times\frac{3^4}{4^5} + 1\times\frac{3^5}{4^5}.$$

這個式子告訴我們：線段長度有

$$\frac{1}{4^5},\ \frac{3^1}{4^5},\ \frac{3^2}{4^5},\ \frac{3^3}{4^5},\ \frac{3^4}{4^5},\ \frac{3^5}{4^5}$$

等六種，每種長度有

$$1, 5, 10, 10, 5, 1$$

條，一共

$$32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

條線段。由此發現，分割線段可透過二項式定理的代數形式闡釋。

3 利用對數性質擲骰子……班佛法則

機率分布的一個重要性質就是所有事件的機率總和是 1，例如丟一枚公正的銅板，出現正面的機率是 $\frac{1}{2}$，而出現反面的機率也是 $\frac{1}{2}$，這兩個數字的和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ 就是 1。投擲一粒均勻骰子也有同樣的性質，也就是說出現點數 1, 2, 3, 4, 5 與 6 的機率都是 $\frac{1}{6}$ ，而它們的和 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ 也是 1。

如果你會利用對數性質 $\log_{10}a+\log_{10}b=\log_{10}ab$ 與 $\log_{10}10=1$ 的話，你將發現底下九個介於 0 與 1 之間的數字和也是等於 1 ：

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{1}\right)=\log_{10}\frac{2}{1}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\log_{10}\frac{3}{2}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\log_{10}\frac{4}{3}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\log_{10}\frac{5}{4}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\log_{10}\frac{6}{5}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{6}\right)=\log_{10}\frac{7}{6}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{7}\right)=\log_{10}\frac{8}{7}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{8}\right)=\log_{10}\frac{9}{8}\ ;$$
$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{9}\right)=\log_{10}\frac{10}{9}.$$

班佛發現日常活動中，有許多以上述九個數字為機率分布的機率模型。最有名，也最容易被誤解的一個模型就是「隨手寫下正整數」這個模型。如果請全班或全校的每位學生隨手寫下一個

正整數，那麼這些正整數的首位數字（例如2489的首位數字就是2）的分布機率為何呢？很多人可能把這遊戲想成跟擲骰子一樣，認為首位數字是 1 的會占$\frac{1}{9}$，首位數字是 2, 3, 4, …, 9 的也都各占 $\frac{1}{9}$。事實並不是這樣的，班佛研究發現，學生所寫正整數的首位數字之分布並不均勻，首位數字是 $d(1 \le d \le 9)$ 的比例約為 $\log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$。

另一個有趣的發現：當你翻閱圖書館的藏書時，你會發現每本書的每一頁被翻閱的次數不相同，如何辨識呢？很簡單，只需看書本側邊黑白的程度，愈黑的那幾頁肯定被閱讀最多次。如果你去統計的話，你將發現頁碼的首位數字是 $d(1 \le d \le 9)$ 的被翻閱的比例是 $\log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$。

像這兩個例子，當你研究與正整數相關的首位數字分布，如果首位數字 $d(1 \le d \le 9)$ 的分布比例為 $\log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$，就稱它符合班佛法則。接下來列舉一些符合班佛法則的事件：

① （存摺存款的首位數字）郵政總局如果統計每位存款人的存款錢數的首位數字，他可能會驚訝的發現，這個首位數字的分布並不均勻，反而符合班佛法則。也就是說，一百多元，一千多元，一萬多元，十餘萬元，百餘萬元，千餘萬元……等的存款戶約占 $\log_{10}2 = 0.3010$ 左右。

② （河流流過的區域面積）統計全世界所有河流所流經的區域面積，這面積的首位數字也會符合班佛法則。

③ （財務報表的首位數字）你的公司想作假帳，逃漏稅嗎？那你得懂班佛法則才有辦法得逞。公司每日進進出出的貨物很多，產生的數據自然龐大，國稅局如何監控公司是否數據造假，逃漏稅呢？這都要歸功於班佛法則，根據統計，如果公司正常運作下，那麼所產生的數據的首位數會符合班佛法則。國稅局為了節省時間與人力，只需查核該公司的數據的首位數字是否符合班佛法則，便可知道該公司的數據是否造假了。

④ （都市人口數字的首位數字）每個都市的人口數的第一位數字也會符合班佛法則。

⑤ （2^n 的首位數字）將數列 $\langle 2^n \rangle$ 的前一千項列出，統計這一千個數字之首位數，你將發現它們的分布完全符合班佛法則的比例。不止一千項，列出一萬項或更多項，也都會符合班佛法則。

⑥ （費氏數列的首位數字）費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 定義為

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \ge 1).$$

數學家猜測費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 的首位數字符合班佛法則。

⑦ （質數的首位數字）將質數依小到大排列 2, 3, 5, 7, 11, …。數學家猜測它們的首位數字會符合班佛法則，但尚未被證實。

班佛發現的首位數字分布現象不僅與人類選取數字的心理相關，也與自然界的多種分布一致。與班佛法則一樣出名的另一個法則是齊普夫法則，它是美國社會學家齊普夫發現的：齊普夫的學生很有耐心地去計算《哈姆雷特》這本書中所出現的字，並且依照它們的出現頻率做降冪排列。頻率最高的字是「the」，共出現 1087 次，緊跟在後面的則是「and」這個字。齊普夫發現，它們的分布狀況遵行了一個數學的金科玉律。當一個人寫書時，將整本書所出現的字，依照它們出現頻率做降冪排列，出現頻率第 n 高的字出現次數與出現頻率最高的字出現次數的比值，可以用數學公式

$$\frac{c}{n^k}$$

來表示，這裡的常數 c, k 與作者寫這本書時的心理素質相關。

齊普夫法則不僅寫書適用，也適用在許許多多的日常生活中，網頁瀏覽人數統計分布就是一個例子。如果將某特別類別的網頁每日瀏覽人數，依多到少做統計，那麼第 n 高的網頁每日瀏覽人數與最高的網頁每日瀏覽人數的比值，也會符合齊普夫法則。

【例題 1】一位作家出版一本書，書中出現頻率最高的字一共出現 1000 次，第 5 與第 10 高的字的出現次數分別為 40 與 10 次。若該書符合齊普夫法則，則求齊普夫常數 c, k 的值。

【解】由齊普夫法則得到

$$\frac{c}{5^k}=\frac{40}{1000};$$
$$\frac{c}{10^k}=\frac{10}{1000}.$$

將兩式相除得到

$$2^k=4 \Rightarrow k=2.$$

將 $k=2$ 代入第一式得

$$\frac{c}{5^2}=\frac{40}{1000} \Rightarrow c=1.$$

故齊普夫常數 $c=1$ ，$k=2$.

練習 3　某特別類別的網頁每日瀏覽人數統計表符合齊普夫法則。若將每日瀏覽人數第 n 高的瀏覽人數記為 $f(n)$ 人，把 $\log_{10}n$ 當 x 坐標，$\log_{10}f(n)$ 當 y 坐標，則證明這些數對 (x, y) 座落在一條直線上。

練習 4　帕累托有一個法則說：在一個國家裡，年收入超過 m 元（美金）的人數占全體人數的

$$\frac{c}{m^k},$$

這裡的常數 k, c 與這個國家有關。有一個國家年收入的中位數是 14400 元（美金），而且知道該國家帕累托常數 $k=0.5$ 。

① 求帕累托常數 c 的值。

② 在該國家，年收入超過多少時，可以擠進高所得的族群。（註：年收入在前 20% 的人士算高所得族群）

4 利用夢境擲骰子……夢的奧秘

在丹增嘉措活佛所著的書《探索夢的奧秘》中，提到愛迪生如何利用夢境的故事：「我們剛睡醒的時候，夢境的回憶猶歷歷在目，這時尚未完全醒過來，稱為半睡半醒狀態。有人認為半睡半醒狀態是一種天才狀態，有很深刻的創造力，就像大發明家愛迪生發明電燈泡的創造力一樣。愛迪生很看重這種半睡半醒狀態，每次在潛心研究發明時，會運用自己的技巧，進入半睡半醒狀態。他會端坐在椅上，利用放鬆與冥想技巧進入寤寐之間的潛意識狀態。愛迪生手握兩個鐵球，手心向下，然後舒服坐在椅子上，手肘靠近扶手，雙手下方的地面上放有鐵盤。當愛迪生入睡時，手就放鬆而自然張開，鐵球就自然掉落，碰擊鐵盤而發出聲響，吵醒自己，然後一再重複這個動作。」事實上，在夢學領域從事研究的學者指出：「夢境約有百分之七十的內容是象徵和隱喻組成，百分之十五是實際記憶，最後的百分之十五是變形和偽裝。」

【例題 2】從過去盜墓者間的資料得知，每盜十個墓，約有九個是空墓，早就被盜走陪葬品。試問：一位盜墓者至少應該盜幾個墓，才有過半的機會，能盜得陪葬品。

【解】令盜墓者盜 n 個墓時，會有過半的機會，盜得陪葬品。也就是說，盜 n 個墓時，都是空墓的機率少於一半，即

$$0.9^n<0.5.$$

將兩邊取對數得到

$$n(\log_{10}9-1)<-\log_{10}2.$$

利用 $\log_{10}9=2\log_{10}3=2\times 0.4771=0.9542,$

$\log_{10}2 = 0.3010$ 得到

$$0.0458n > 0.301 \ \Rightarrow \ n > 6.572.$$

故盜墓者至少應該盜 7 個墓，才有過半的機會，能盜得陪葬品。

5 利用累積的經驗擲骰子……比賽制度的選擇

運動競賽或棋藝比賽常採取多場的比賽制度，如三戰兩勝，五戰三勝或者是七戰四勝等。運動選手或下棋者應該參加或採用哪個比賽制度，對自己最有利呢？讓我們計算看看！

【例題 3】你和你的好朋友經常打桌球，根據過去的經驗得知：在每一局中，你獲勝的機率為 $p(\frac{1}{2} < p < 1)$ 。今天你的好朋友想跟你來一場比賽，至於是採三戰兩勝或者是五戰三勝的比賽制度，由你決定。問：你應採取哪一種比賽制度才有較高的勝算。

【解】設在三戰兩勝及五戰三勝中，贏得比賽的機率分別為 P_3 與 P_5 。經由計算得到

$$P_3 = p^2 + (C_2^3 - 1)p^2(1-p) = p^2 + 2p^2(1-p);$$

$$P_5 = p^3 + (C_3^4 - C_3^3)p^3(1-p) + (C_3^5 - C_3^4)p^3(1-p)^2$$
$$= p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 .$$

因為 $\frac{1}{2} < p < 1$ ，所以 $-1 < 1-2p < 0$ 及

$$P_3 - P_5 = [p^2 + 2p^2(1-p)] - [p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2]$$
$$= 3p^2(1-p)^2(1-2p) < 0.$$

故選五戰三勝贏得比賽的機率較高。 ■

95學年度龍騰版數學教科書的特色

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

約莫三年前幫龍騰編輯數學新天地，開始只是講好寫問題集，當顧問，進而作主編，最後作了九五數學暫綱的主持人，有一點出乎意料之外。如今離新課本的使用已不遠，教科書的編寫也進入第四冊，希望借助這篇短文讓中學老師提早了解即將出爐的龍騰數學課本之特色。

數學是科學之母，也是一種開放，公開的學問，所以每位老師都可以用自己的一套來詮釋這共同的學問。也因為如此，數學老師是最勤於編輯自己講義的人。也可以說，每位老師心中的數學課本，才是真正最適合他本身教學使用的教科書。至於出版社出版，經編譯館審查通過的教科書，大概只能角逐老師心目中第二順位的課本吧。

儘管如此，我們還是盡所有可能的編輯一套適合大多數老師教學、學生使用的課本。這套即將出爐的課本，已盡可能改進現行各家版本的缺失，讓老師容易掌握教學，學生有興趣閱讀的方式來編寫。底下是本教科書的一些特色：

1 華山處士如容見，不覓仙方覓睡方

台灣這幾年吹起哈韓風，美容熱，每個人都想當現代的楊貴妃。皮膚診所的主要治療項目不是幫病人根治香港腳，而是幫客人進行皮膚美容。如果你逛街看到「華山處士如容見，不覓仙方覓睡方」這樣的招牌，那肯定不是文人墨客的住所，而是一間很想淘空妳荷包的美容診所。陸游早在九百年前就領悟了「如果住在華山的道士們願意接見我的話，肯定不會探詢如何成仙的方法，只想請教他們如何睡得安穩的方式」這樣的道理。事實上，擁有良好的睡眠品質才是養顏美容、延緩衰老的捷徑，而坊間的美容診所，在我看來，有點近似數學補習班，看似速成，不繞遠路，其實是帶你走了許多冤枉路。龍騰新版教科書本著踏實穩健的方法，讓多數的學生可以接受「數光」的普照。

新版教科書花很多時間在每節的引言編寫上，雖然對多數老師來說，這部分可能很快的教過去，但是引言常有扮演畫龍點睛的效果。好的引言或舉例，可以快速的導引學生進入本節的重點，也可以省掉老師許多口舌。所以我們盡可能以貼切、不難的實際例子當開始，讓老師可以作比較多的發揮，學生能夠快速的了解本節要傳授的數學意義。接下來的例子安排，以深入淺出的方式呈現，在數據上力求簡捷好算，題意清晰易懂。最後一個例子以應用問題為原則，加深學生對本節的印象，帶出數學的應用意涵。

在習題的安排上，基礎題是例題與隨堂練習的延伸，在檢測學生是否懂了課本的例題為原則，其中的第一題或最後一題是所謂的概念題，目的在驗收學生對本節重要觀念的了解程度。在進階題部分，以不超過四題為原則，著重訓練學生綜合解題能力，難度以適中為原則。將題目切割清楚，習題儘可能配合教過的例題，避免老師還需重教一遍習題為原則，這是本書在題目取捨上的梗概。總之，讓使用課本的老師睡得安穩，

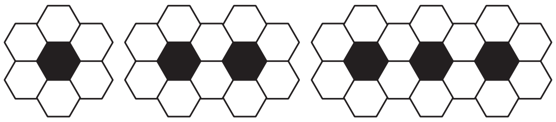
學生作夢都會笑，以當現代阿基米德為樂，是我們要達到的目標。

同時為了讓學生對未來的學測或聯考熟悉，在每章的章末安排十道總習題，內容分成概念題、程序題與解題三大類型。這三大類型是大考中心的衡量標準，概念題以測驗學生基本觀念為準，程序題則檢驗學生套用公式與定理的能力，解題則是綜合檢驗數學能力。在課文例題，節末習題或章末總習題，安排選擇式的概念題應該也是本書的一種創新及突破。

2 教授的私房菜……主持人的錦囊妙計

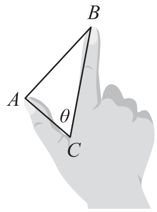
雖然在大學服務，但由於對中學數學教育的熱誠，過去十二年來，每當在書中偶遇或腦中乍現有趣且適合中學的好例子，都會記錄在我的電腦裡，我把它們稱為教授的私房菜。在本教科書裡，會見到一些我收藏的私房菜，在此舉四個例子：

其一，有一道基本例題是利用六邊形磁磚來檢測學生對等差數列這觀念的反應（如圖 1）：求第 n 個圖的白色正六邊形個數。



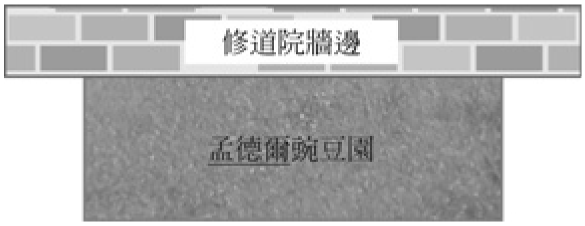
▲圖 1

其二，餘弦定理是中學幾何學習上很重要的一個定理，為了讓學生易學，易記，我們利用一道手指的應用問題來反應這個定理（如圖 2）：當虎口張開的角度 $\theta = 60°$時，求長度 AB 的值。



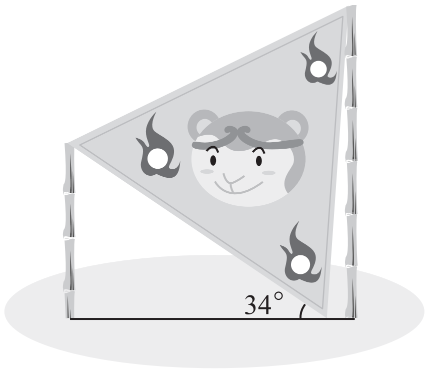
▲圖 2

其三，二次函數的最大與最小值問題原本是國中生就該熟悉的課題，隨著九年一貫的數學課程簡化，國中生對二次函數的圖形與應用卻變得有點陌生。為了設計一題最大與最小值的應用問題，我們參考了遺傳學之父孟德爾的豌豆園，當初在修道院的後院牆邊所蓋的矩形碗豆園成為二次函數應用問題的來源：孟德爾想在修道院的後院牆邊，用圍籬圍出一塊矩形碗豆園（如圖 3，只須圍三邊，第四邊是牆壁），若圍籬的長度有 48 公尺，則要如何才能圍出最大面積？

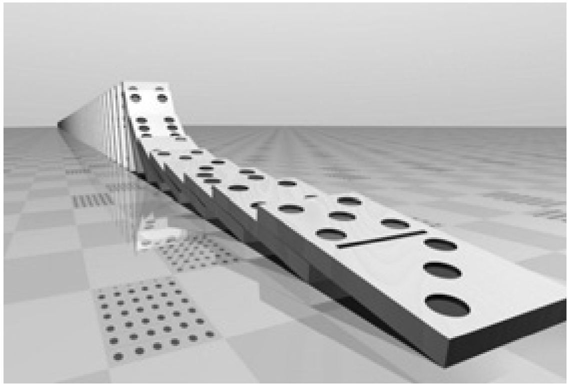


▲圖 3

其四，和差與積的互化公式是學生很頭大的問題，而且都在做些抽象的化簡工作，我們特地設計了一道有趣（不難）的應用問題：某校為了舉辦科展，將一長竹子鋸成兩段，分別豎立在會場門口，且在兩段竹子頂端與地上一點，架設一個邊長為 10 公尺的正三角形看板（如圖 4 所示）。已知 $\cos 26° = 0.9$，求原竹子長。



▲圖 4



▲圖 5

除了這四個例子外，還有許多數字設計精美，情境生動有趣的私房菜，等著各位老師及學生來品嚐。透過生動有趣的數學題目，讓數學學習有如寓數學於娛樂之中一樣。

3 捏泥成壺的巧手……華倫博士的客串演出

尼采在《拜火教教主如是說》這本書裡，有一段耐人咀嚼的哲學思考：「當你見到猿猴笨拙的行為時，你該覺得好笑還是自卑呢？到底是取笑猿猴的不靈活，笨手笨腳的行為，還是對笨拙的猿猴可以演化出人類，而我們似乎很難比牠們進步得更多感到自卑呢？」人們之所以異於動物，主要是具有靈巧的雙手與聰明的大腦。

在教科書的每章章首，李華倫教授善用他那捏泥成壺的巧手幫我們設計了立體，又能深入反應該章數學主題的圖形。圖形是由數學主體與一個數學地板堆砌而成，例如為了反應第二章「數列與級數」的主題……數學歸納法，我們以骨牌為主題，地板則以一道無字證明來呈現（如圖 5）：

老師與學生除了發揮智力學習數學課程外，不妨抽空欣賞一下巧手與智力結合的傑作，也可以讓你對本冊的數學知識歷久彌新，餘音繞樑整學期仍不停止。

4 女人撐起半邊天……琬青老師的美術要求

兩年前我到關西國中演講，在那兒碰到很會玩棒球的學弟，跟他聊天之後才知道，他們學校有六位數學老師，他是唯一的男性。而且聽說，期末老師聚會時，八、九桌裡，大概男性只能勉強占有一桌。真沒想到，國中的老師分布這樣不平均，高中雖然好些，但也有女生過半的趨勢。可是，現行的高中數學課本作者裡，卻沒有女老師參與，有感於這樣的不平衡，本套課本的作者裡，邀請了北一女的許琬青老師參與，突破長期以來對女性的不尊重。第一冊第一章第四節，複數與複數平面，在高斯這位數學家的介紹上，我們採用郵票的圖像，同時也選取了一張有關複數平面的郵票當圖形。第一章的首頁圖也是以談論數系的郵票當背景呈現。有了女老師的參與，可以讓文字敘述柔和，圖形色彩豐富，從這一章就可以窺見一二。

除了北一女許琬青老師，李華倫教授外，本書的作者還有桃園高中陳清風，彰化高中謝銘峰，建國中學曾政清，同時，彰師大數學系黃森山教授也幫本套書籍作了總審定。另外，在第四、五冊統計部分，也邀請了淡江大學的鄭惟厚教授當指導。除了這些教師外，每當編寫工作進行到較有爭議的主題時，我們都會藉著演講或上課的場合探詢處在第一線的老師們之意見，將這些意見融入課本中。

5 結語……夢裡不知身是客，一晌貪歡又何妨

教科書開放是我國教育的一大變革，儘管很多人認為台灣太小，沒必要開放教科書，但是，在政府還沒改變政策之前，如何協助民間出版社發行對後代子孫有益的數學課本，是每位從事教育工作者必須思考的問題。同時如何慎選數學課本，不要造成劣幣逐良幣現象（例如：教科書講義化，困難題目的統合……等），也是每位第一線的中學教師必須要有的教育良知。九五暫綱在一些方面定得很不合理，例如：將遞迴數列移至排列組合那章，而且要求教授的內容太深；統計部分太重，高三只有三小時，但須教授的內容卻超多；微積分只教授多項式的微積分，但卻需教一學期……，這些都是編寫教科書時的一大難題及挑戰。為了克服這些問題，在過去兩年多的時間裡，本人花了極大的時間閱讀各種數學書籍，到處演講，聽取中學老師的教學意見，相信這樣充分的準備，可以化解暫綱的不合理處，並編出一套適合多數學生使用的教科書。

數學是一門手腦並重的科學，光靠頭腦作邏輯演繹的思考是不夠的，還需親自動手去計算與操作，這樣的了解才會深刻。本書就是以這樣為主軸，不僅重視數學式子的簡潔，還儘量讓數學的段落與中文斷句一致，幫助學生快速理解。此外，又特別重視書裡的插圖，無論是章首的圖形，引言的插圖或例題的引導圖，都儘可能的達到信（與數學意涵配合）、雅（樸素美觀）、達（切合題意）的境界。音樂也是一門手與腦並用的科目，但是大多數的人只能照譜彈琴，無法享受創作的樂趣，唯獨數學可以達到這種境界。每題數學題目，每位老師與學生都可以有他自創一格的思維與解法。編出一套學生容易模仿，老師輕鬆上手，又不抹殺學生創造力的數學課本，是我們秉持的目標。

本文只是新版教科書的一點點介紹，除了上述的構想外，還有許多針對過去各版本為人所詬病的內容之改進與課程加強，更詳細的部分可以參考即將出版的正式書籍。教科書如同達爾文的進化論一樣，它依循著不斷的演化與進步的腳步前進，希望各位中學教師在詳閱課本之餘，能提供意見，讓我們有更大改進的空間。

唯一的可能

◎許介彥／大葉大學電信工程學系

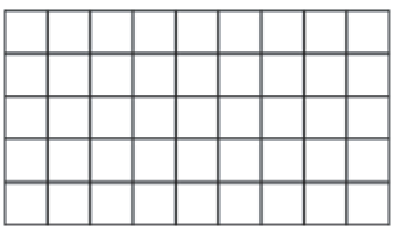
我的口袋裡裝著一顆圍棋棋子，它的顏色可能是黑色或白色；如果我還告訴你它的顏色不是黑色，你能肯定它是什麼顏色嗎？

當然可以。既然只有黑白兩種可能，而黑色的可能性又被排除了，白色已是唯一的可能。

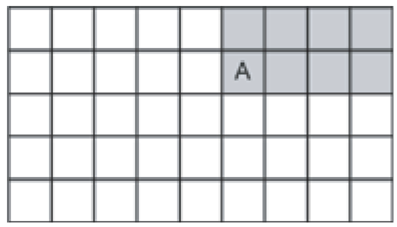
這是我們俗稱的「消去法」；將不可能的情形排除後如果只剩下一種可能，那麼這種可能已經不僅是「可能」而是「必然」。這個道理雖然淺顯，在許多數學證明中卻能派上用場。本文將介紹的遊戲就是一個例子。

遊戲規則

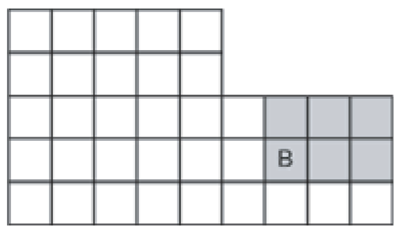
以下介紹一個由兩個人玩的遊戲。一開始在 A 與 B 兩人面前有一個棋盤狀的長方形區域，其上由許多直線與橫線劃分出許多小方格；例如下圖是一個 5×9 的長方形，其中包含了 45 個小格：



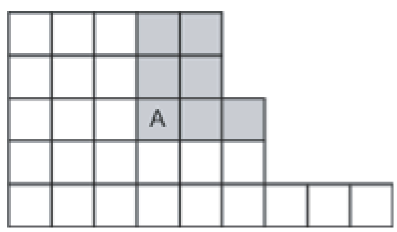
就像下棋一樣，這個遊戲是由 A 與 B 雙方輪流玩。我們假設每場遊戲都是由 A 先玩，即由 A 先選擇棋盤上的任一小格；選好之後，被選到的小格以及所有位於此小格右方及上方（包括右上方）的其他小格將一起「消失」。舉個例子，如果 A 選擇的是下圖中標示著 A 的格子，那麼圖中所有以陰影顯示的格子將一起消失：



接下來輪到 B 玩。他可以由剩下來的小格中任意選擇一個格子；同樣地，被選到的小格以及所有位於此小格右方及上方的其他小格將一起消失。延續上面的例子，假設 B 選擇了下圖中標示著 B 的格子，那麼圖中所有以陰影顯示的格子將一起消失：

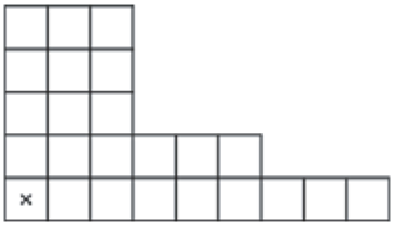


接著又輪回到 A 。延續上面的例子，如果 A 選擇了下圖中標示著 A 的格子，圖中所有以陰影顯示的格子將一起消失：



玩了以上三步後，原來的長方形區域變成了

如下的形狀：



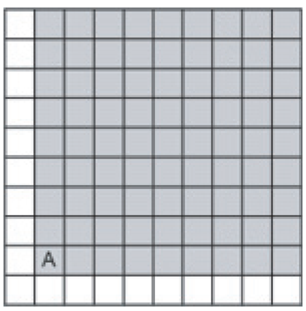
這個遊戲以拿到原來的長方形左下角小格（上圖打叉處）的人為輸家，因此遊戲進行過程中，A 與 B 兩人都會儘量避免拿到左下角小格，也都會希望能迫使對方拿到左下角小格。

讀者不難看出隨著遊戲的進行，小格的個數將愈來愈少，因此經過若干步驟後遊戲一定會結束，而且 A 與 B 兩人中必有一方獲勝，不可能會有和局的情形。

正方形棋盤

請考慮以下問題：如果一開始的長方形區域是一個 $n \times n$ 正方形（$n > 1$），A 與 B 兩人中是否有人一定能獲勝？

答案是肯定的；先玩的人（也就是 A ）一定能獲勝。 A 獲勝的策略是將第一步選擇在長方形左下角小格的右上方（下圖中標示著 A 之處），如此一來圖中所有以陰影顯示的格子將一起消失，B 所面臨的圖形是一個兩條邊等長的 L 形區域：



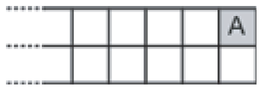
不管 B 接下來將陸續做出什麼選擇，A 只需「模仿」B 的選擇即可；如果 B 從 L 形區域的某一條邊上拿走了某些格子，A 跟著就從 L 形區域的另一條邊上拿走相同數目的格子，如此一來每次 A 拿完後所剩下的圖形都能維持為一個兩條邊等長的 L 形區域（以格子的個數而言，A 都能使每次拿完後剩下的格子數為奇數）。

讀者不難想像，由於 L 形區域的兩條邊愈來愈短，B 終將面對只剩下一個小格（即原來長方形的左下角小格）的情形，因此 A 必能獲勝。

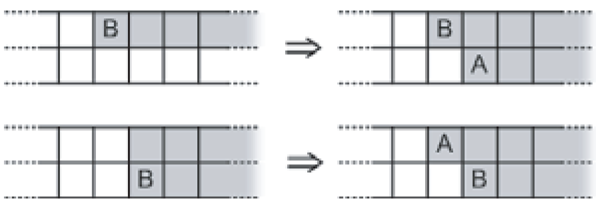
瘦長的棋盤

如果一開始的長方形區域大小為 $2 \times n$（$n > 1$），A 和 B 兩人中有沒有人一定能獲勝？

答案同樣是先玩的人（也就是 A ）必能獲勝。此時的長方形區域是由上下兩列組成，A 獲勝的策略是將第一步選擇在位於上列最右邊的小格（下圖中標示著 A 之處），使得 B 所面臨的圖形是一個下列比上列多一格的圖形：



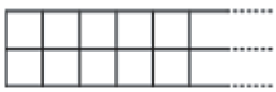
接下來不管 B 陸續做出什麼選擇，A 都一定能夠讓每次 B 所面臨的圖形是一個下列比上列多一格的圖形；也就是每當 B 選擇了位於上列的某個格子，A 跟著就選擇位於該格右下方的格子；而每當 B 選擇了位於下列的某個格子，A 跟著就選擇位於該格左上方的格子，如下圖所示：



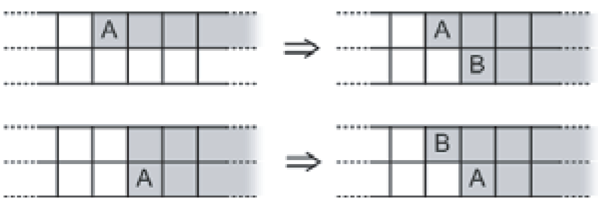
隨著遊戲的進行，剩下的格子數將愈來愈少，讀者不難預測 B 終將面臨上列已全被拿走而下列只剩一格（即原來長方形的左下角小格）的情形；因此只要 A 在玩的過程中不犯錯，B 註定會輸。

無限長的棋盤

發揮一下想像力，假設棋盤是一個大小為 $2\times\infty$ 的長方形區域（如下圖），此時 A 和 B 兩人中有沒有人一定能獲勝？



以下我們說明：後玩的人（也就是 B ）一定能獲勝。 B 的做法如下：如果 A 的第一步選擇了位於上列的某個格子， B 接著就選擇位於該格右下方的格子；而如果 A 的第一步選擇了位於下列的某個格子， B 接著就選擇位於該格左上方的格子，如下圖所示：



這樣一來，不論 A 的第一步（及之後）的選擇是什麼， B 都一定能讓 A 每次所面對的圖形是一個下列比上列多一格的圖形；與剛才看過的 $2\times n$ 的情形比起來現在剛好情勢逆轉，反而是 A 被 B 亦步亦趨地「咬」住了，因此 A 註定會輸。

具一般性的情形

現在進入本文的正題：如果一開始的長方形區域大小為 $m\times n$ （ m 與 n 為大於 1 的任意正整數）， A 與 B 兩人中有沒有人一定能獲勝？

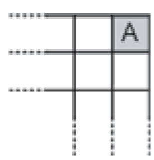
我們前面看過的 $n\times n$ 和 $2\times n$ 的情形都是由 A 獲勝，我們也都實際說明了 A 如何取勝。對較具一般性的 $m\times n$ 情形，我們以下仍將說明 A 必能獲勝，不過此時要找到一個可讓 A 必勝的策略並不容易；我們也並不打算這麼做。

我們將說明：⑴這個遊戲一定存在著可讓 A 必贏的策略或可讓 B 必贏的策略。⑵不可能有可讓 B 必贏的策略存在。如果以上兩點都成立，由本文一開始所提到的消去法，我們即知一定有可讓 A 必贏的策略存在（至於是什麼樣的策略則是另一回事）。

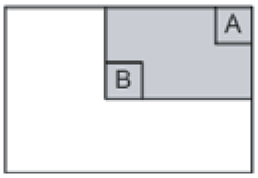
我們先說明第一點：這個遊戲一定有可讓 A 必贏或可讓 B 必贏的策略存在（也就是說這個遊戲在本質上是不公平的； A 與 B 兩人中其實有人一定能贏，只要他知道方法的話）。

採歸謬證法；我們先假設這個遊戲沒有可讓 A 必贏或可讓 B 必贏的策略存在。遊戲一開始，當 A 要選擇第一個格子時，由於沒有可讓 A 必贏或可讓 B 必贏的策略存在，因此當時棋盤上必定有某些格子對 A 而言是選了之後將「輸贏難料」的格子。如果 A 的第一步選了這些格子之一，接下來 B 所面對的棋盤上一定也有某些格子對 B 而言是選了之後將「輸贏難料」的格子（否則剛才 A 的第一步所選擇的格子對 A 而言就不會輸贏難料）。依此類推，如果 B 的第一步選了這些格子之一，接下來 A 所面對的棋盤上一定也有某些格子對 A 而言是選了之後將輸贏難料的格子；如果 A 選了這些格子之一，接下來 B 所面對的棋盤上一定也有某些格子對 B 而言是選了之後將輸贏難料的格子……，這個遊戲因此將無止盡地進行下去，但這是不可能的，因為一開始的格子數有限，這個遊戲經過 A 與 B 輪流走了若干步之後一定會將格子拿光，遊戲終將結束；因此一開始的假設是錯的。我們至此可以肯定這個遊戲一定有可讓 A 必贏或可讓 B 必贏的策略存在。

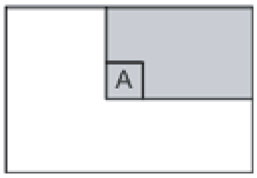
接著說明第二點：不可能有可讓 B 必贏的策略存在。考慮 A 的第一步選擇了位於整個長方形右上角小格的情形：



讀者不難看出接下來不管 B 的第一步選擇哪裡，原來的長方形在經過 A 的第一步與 B 的第一步之後剩下的圖形（如圖 1）其實會與一開始 A 的第一步就選擇上述 B 所選擇的位置所剩下的圖形相同（如圖 2）：



▲圖 1



▲圖 2

如果這個遊戲真的有能讓 B 必贏的策略存在，那麼上面的圖 1 對 B 而言是一個必能獲勝（可令對手必輸）的圖形，但是這也意謂著圖 2 對 A 而言是一個必能獲勝的圖形；如果 B 真的能在圖 1 取得必勝的優勢，那麼 A 儘可在第一步圖 2 就取得這樣的優勢，因此本遊戲不可能有能讓 B 必贏的策略存在。

既然上述兩點都成立，我們已經證明了這個遊戲一定有可讓 A 必贏的策略存在。此證明屬於 nonconstructive proof，因為我們並沒有明確地指出是什麼樣的策略可讓 A 必贏。

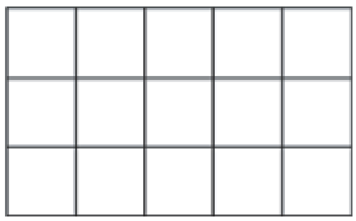
結語

本文所介紹的遊戲通常稱為 Chomp。文中棋盤為 $2 \times \infty$ 時後玩者必能獲勝的結論可能會令某些讀者訝異，因為 $2 \times n$ 與 $2 \times \infty$ 的棋盤在感覺上相當類似，都是由上下兩列組成，只是行數一個是常數（可以是非常大的數），而另一個則是無窮大；這麼一個「小小」的差異竟讓這兩個問題有了完全相反的結論。

文中在棋盤大小為 $m \times n$ 時，我們說明不可能有可讓 B 必贏的策略存在所用的邏輯推演方式在術語上通常稱為 Strategy-Stealing，它的進行方式是先假設有可讓 B（後玩者）必贏的策略存在，然後讓 A 走一個「無關緊要」的第一步，接下來的遊戲進行順序是 $B \to A \to B \to A \cdots$，就像是 A 與 B 互換了角色，B 變成了先玩者一樣，因此如果有能讓後玩者必贏的策略存在，那麼 A 應該就能用相同的策略來打敗 B（即 A 可偷取原本 B 用來勝 A 的策略來勝 B），而這與 B 可獲勝的假設矛盾，由此得知不可能有可讓後玩者必贏的策略存在。

除了本文的遊戲外，還有許多著名的數學遊戲（如 Hex, Tic-Tac-Toe, Gomoku 等）也都可以利用上述方式來證明不可能有可讓後玩者必贏的策略存在，不過這並非適用於所有的棋類遊戲；有些遊戲甚至其實對後玩者較有利，亦即在棋類遊戲中儘管先發常能制人，但後發者未必制於人。

文章到了尾聲，該輪到您來動動腦筋了。請試試為下面的 3×5 棋盤（圖 3）找出一個可讓先玩者必贏的策略：


▲圖 3

參考資料

[1] 許介彥（2005），先發不制人，暨大電子雜誌，第 30 期。

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Winning Ways For Your Mathematical Plays,* Volume 1, 2nd edition, A K Peters, 2000.

學理構念的再脈絡化：學習前導架構

你的一生並沒有浪費，你需要時間來學習剛才學會的東西。
王石珍譯《為自己出征》

◎許秀聰／北一女中

何謂「學習前導架構」

睡美人對仙女說：
「我怎能嫁予王子，除非我是一位公主？」
我認為睡美人心中真正想表達的是：「公主才嫁王子，我不是公主，所以不會嫁給王子。」這樣的說法是：

正確	錯誤	我不知道
□	□	□

（理由：________）

進入高中，數學學習中要使用不少的基礎邏輯概念，如果在接觸高一課程前，老師為新生設計一份用在開學第一堂課的第一冊學前評量問卷，讓學生在回答一個個生活題的同時，看看自己擁有的邏輯概念正確性多高，促使老師掌控學生舊有基礎，明瞭如何在學生已有知識和將學內容間搭橋樑，教師的數學教學是否較易推展，學生的數學學習成效是否能有效提升？

這就是我在思考的數學教學改革的開端，後來由此發展出一套結合「假期自學教材」和「每冊學前評量問卷」的教學實施做法。因為這一切都在學生正式上數學課前進行的，所以我稱它為「學習前導架構」。

大學畢業至今，除了剛開始被分發在北市國中任教四年之外，個人已在這所公立女子高中教數學長達十四年。92 學年度時我再度教授兩班高一數理資優班，並接受某大學委託，輔導一位數學科的實習教師。前一回教數理資優班的經驗，讓我從學生身上學到很多，這個教學相長的過程引發了自身數學教學的重整。另外因著班級教學實施時有實習教師從旁觀摩，我們不但進行課程設計之意見交流，並於課後檢討上課狀況；實習教師不只是接收輔導老師的看法，也經常提出自己的意見、給予建議，促使個人更加仔細地檢視自己的課堂教學。

大部分的教師都是一直在轉變的，小轉變是發生在教室組織或課程上，至於提升後的二階轉變 (Second-Order Change) 則含不同的思考、教學和學習方式。我本身一直覺得數學若能讓人覺得易於親近，大家有機會了解「真正的數學到底是什麼？」數學就不再會是一般人口中那個花很多力氣卻不知道為何要學的科目。個人相信，「若能在一開頭塑造數學的學習環境上用心，應該可以激勵學生用正面而且積極的態度與眼光來看數學」。但是，學生應在什麼起始環境下接觸數學概念？在思考這個問題的答案時，個人期望教學知能的成長及教學信念、態度的轉換，能兼顧「數學的易學」和「學生的樂學」。

要落實以上的想法，第一步想在教學活動中同時呈現數學的易學及促成學生的樂學。我本身並非一個初任老師，教學改變的原因不是現實與理想的衝突，而是「關懷學生」，希望數學對學生能產生提升智力水平的作用。對學生有意義的數學必須是易學的，因為「理解的本身就是喜悅

與滿足的泉源」（Skemp, 1989；請見許國輝譯，1995, p.183），也就會兼顧樂學，而且「曾經由理解而獲得滿足感的學習者，都願意再付出努力以求取得另一次滿足」(ibid, p.43)。

根據許多數學教師的研究（例如 Thompson, 1992），個人相信教師在數學方面的信念及對數學的了解是影響教學實施的潛藏重要成分。然而，除了從教師教學知識和信念的角度來重新思考自己的教學之外，從學生學習的角度來重新看待數學教學，或許能有更大的啟示。教學活動是為了學生的學習而設立的。就如Skemp所說，學習猶似開拓邊陲地帶的活動，邊陲地帶雖然不是我們能力範圍以內的領域，但是，學習就在這個地帶發生。教師所需做的，並不是代替學生學習，因為，我們無法取代學習者腦海內第二系統(delta 2) 的工作；反而要與學習者合作，藉提供良好的學習情境和材料，盡力幫助學習者自己學習。由於學習是要將我們不能充分勝任的新開闢地域劃入版圖內，所以 Skemp 提醒數學教師注意，有時應讓學習者重回安全的已知地帶，而且在繼續開發新領域前，要提供機會（包括時間和學習材料）讓其鞏固一個已開發的新領域。這需要一個連結既有基模與新知識的機制，例如奧蘇貝爾 (Ausubel) 的「定錨(Anchoring)」概念（施良方，1996, p.243）：

學生首先應該學習最一般的、包攝性最廣的觀念，然後根據具體細節對它們逐漸加以分化。教師有意識地用這種方式來安排教學內容的話，就能使學生的學習達到最佳水平。換言之，當學生認知結構中已有的、包攝性較廣的、與新知識特別有關的概念能被用來作為理想的固定點時，學習和保持新知識就最為有效。

這個教學原則的配套做法是，前導架構或先行組織者(Advance Organizer) 的概念 (ibid, p. 245-246)：

促進學習和防止干擾的最有效策略，是利用適當相關的和包攝性較廣的、最清晰和最穩定的引導性材料，這種引導性材料就是所謂的組織者。由於這些組織者通常是在呈現教學內容本身之前介紹的，目的在於用它們來幫助確立意義學習的心像，因此又被稱為先行組織者。奧蘇貝爾認為，先行組織者有助於學生認識到：只有把新的學習內容的要素與已有認知結構中特別相關的部分聯繫起來，才能有意義地習得新的內容。

從Skemp的見解個人得到的啟示是：教學對學習者的幫助在創造一個有益的學習環境，而且個人的學習無法由他人取代。這表明了，一位關心學生實際學習是如何發生的數學教師，應創造一個學生主動學習、盡情大膽思考的學習環境。配套的措施是在課前設想合適發展數學概念的情境和材料，在課堂中帶領討論，引導並提升數學探究的過程。奧蘇貝爾的主張則引領關心學生認知過程的教學者，了解實際對學生有幫助的教學活動，應依循一般整體架構到分化的程序，並以內容前的引導材料促進有意義的學習。

上述的學理構念和我本身的意圖教學構想能否改善課堂教學，而重新構築個人既有的數學教學概念？關鍵應在於教學實踐。在Ensor(2001)的研究中，初任教師將數學教學方法課程再脈絡化(Recontextualizing)，以應用於學校教學。「再脈絡化」的概念來自 Bernstein (1977, 1990)和 Dowling (1996)，指的是「當人們身處不同社會脈絡下，需適應轉變，將之前對論述內容的體會及實現重新具體化」(Ensor, 2001, p.297)。在這次的教學試驗中，個人要將學理構念在自身教學場域再脈絡化，須做到融合不同的學理構念和調整教學的實施。因此，我從對 Skemp 和 Ausubel 兩人主張的理解出發，再針對本校資優班學生學習的探究取向，架構此次教學行動研究的教師及學生課堂活動脈絡。

教學研究的設計

本研究設計的理念是設計研究 (Design Research) 或稱發展研究 (Development Research) (Freudenthal, 1973, 1991)，研究的三個核心構念是：預想學習進程、融入情境脈絡和重新創始數學。根據以上所述的三個核心，本研究共分成研究的開展、研究的過渡及研究的修正等三階段動態循環的發展歷程。第一階段（92 年 7 月到 93 年 1 月），初步設定教師扮演學習的促進者，想以學習前導架構幫助學生從舊有的基模出發，經驗兼顧認知、情意和動機面的學習素材。當學生在第一階段已經初步經驗和習慣使用前導架構後，下一階段的研究設計主要在於延續和加強學生這種數學學習的精神。

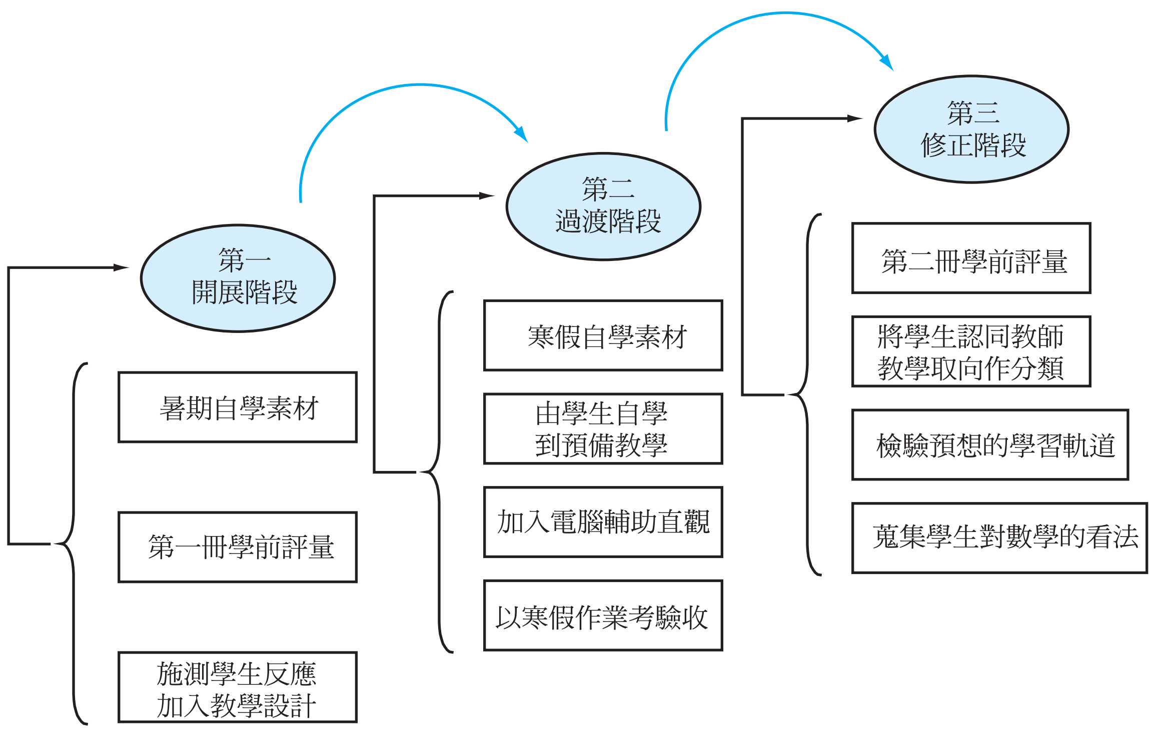
個人設計在寒假期間進行第二階段（93 年 1 月到 2 月）的研究。希望藉此，繼續探索和深化自學素材的成效，且學生的觀點應該比較能在此階段顯露。這階段因為沒有實施正式的課堂教學，所以，設定教師角色為學習情境的布置者。這個過渡階段的研究設計加入預備教學的作用，也在假期結束時施行假期作業考，以檢視自學成效；另一點是，嘗試透過電腦應用軟體來輔助學習，提高學生的自學效果。

第三階段研究（93 年 2 月到 93 年 7 月）的重點在修正計畫，這階段學生學習的內容較為抽象，故須使用不少符號表徵，並須加強學生一般化數學內容的能力，故教師角色定位在學習的檢核者。個人的策略是經由教師目標導向的教學設計與活動，鼓勵學生進行反思並轉化現有的基模，以幫助理解（如圖一）。

教學試驗的結果

底下我想舉出相關實徵資料，幫助數學教育研究者及其他中學數學教師了解學習前導架構對學生的幫助。

第一階段的自學素材，是想發展學生自己的興趣與能力，故而將整個第一冊的數學內容用多面向的方式呈現。內容除了練習題目之外，又加入概念性的故事、操作性的工作、數學家小傳、



▲圖一　「學習前導架構」進展流程

科普書欣賞等，希望學生能在比正式課堂教學自由、輕鬆的氣氛下，展開一學期的數學學習。第一冊學前評量問卷的內容包括邏輯、函數、無窮數列和多項式的代入，挑選重要或學生容易產生衝突的概念，設計一些概念判斷的題目，希望她們能「預覽」學習的數學主題，進而找出自己的先備知識或迷失概念(Misconception)。問卷的架構如下：

a. 單選題：包括真實事件中的關係 4 題，數與式的次序關係 5 題，平面圖形的關係 3 題，數式與圖形聯結關係 3 題，此部分共 15 題。

b. 問答題：包括虛數比大小、無窮循環小數、無窮級數求和、多項式代入各一題，此部分共 4 大題。

其中問答第 2 題

(1)$0.\overline{3}=0.3333\cdots$，則 $\mathbf{0.\overline{3}>\frac{1}{3}}$，$\mathbf{0.\overline{3}=\frac{1}{3}}$，$\mathbf{0.\overline{3}<\frac{1}{3}}$，哪一個會成立？或都不成立？

(2)$0.\overline{9}=0.9999\cdots$，則 $0.\overline{9}>1$， $0.\overline{9}=1$，$0.\overline{9}<1$，哪一個會成立？或都不成立？

曾造成不少學生的認知衝突，她們往往在承認 $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$ 之下，卻又直觀地否定 $0.\overline{9}=1$。即使，當她們發現 $0.\overline{3}\times 3$ 會等於 $0.\overline{9}$ 時，情況卻仍未有顯著地改善。

當我回收學生的訂正時，學生 104 在她的筆記本上寫道：

我想到從前看過的課外書上，有一段內容在講 $0.\overline{9}=1$，記得它是這樣寫的，$\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=0.142857142857\cdots+0.857142857142\cdots$，即 $1=0.999999999999\cdots$。這樣我能接納 $0.\overline{9}=1$ 的事實了！

由於這樣的知識重構，似乎主動地化解了這位學生的迷思概念；在 2-2 有理數與實數這個單元教學時，個人再請這位學生向全班分享她使用分數化成循環小數來理解 $0.\overline{9}=1$ 的看法。實習老師也在下課跟我討論見習心得時，特別提到這一段。他說「2-2 這節我對 $\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=1$ 用來解釋 $0.9999999\cdots=1$ 這部分很感興趣……，它能幫助學生信服我們將在第三章解釋的循環小數 $0.9999999\cdots$是真的等於 1」。個人就再進一步請他想一想，這個內容本來是由學生在學前評量卷的訂正筆記上提出的，而個人卻放在此處請她分享，那麼她為什麼會去想起這段內容呢？實習老師和我都認為這位學生的回顧，源頭應該是學前評量問卷。而個人這樣的教學設計和師生課堂互動過程，也同時是想讓實習老師明瞭，教學的功力可由各章節的概念介紹，提升到融合學生數學思考和教學設計的模式。因此，運用學前評量問卷的結果和訂正，應可讓課室中師生協商的時間點，提前到實施課堂教學之前。

這回的教學試驗以建立「學生學習前導架構」為重心，從參酌Skemp的「學習地帶」理論及奧蘇貝爾的「先行組織者」概念出發，將學理依研究者的教學特質及教學場域再脈絡化，構思出可以在課堂教學實際採用的教師活動，並進而影響學生活動，達成學生自主理解數學的研究目標，學習前導架構對學生的學習提供鷹架功用。個人希望整合學與教的軌道，儘量做到「以學生為中心思考概念理解取向的數學教學」和「以數學的樂學和易學性思考可能的教學活動」兩點，也為了達成這個教學目標而深化了個人的教師功力。

個人如何看出來這些學生態度的轉變呢？在課堂上解數學問題時，並不像一般傳統教室中的學生，只認定教師和教科書為數學知識的源頭，她們總想著自己才是學習責任的真正負擔者，相信每位學生以自己的直觀方式依情境、脈絡學數學才是比較合適的學習方式。如同 Simon(1994, p.71)所說的，「師生在課堂從事的工作與數學家

是可以平行類比的，兩者都在找概念的源頭、重新創始數學和明瞭應用價值」。在這種活動流程下，學生和數學之間搭起了「值得探究，終有所獲」的關係。

參考文獻

[1] Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.
[（許國輝譯，1995）。**小學數學教育－智性學習**。香港：公開進修學院出版社。]

[2] 施良方 (1996)。**學習理論**。高雄市：麗文文化公司。

[3] Simon, M. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 71-94.

用向量來看平面族定理

◎蘇俊鴻／北一女中

前言

在空間中的平面與直線的章節中，我們經常使用「平面族定理」來解題，這個定理在現行課程大綱的安排上並未納入。因此，許多人對它只是知其然，而不知其所以然。事實上，透過向量觀點的切入，可以為我們提供理解的途徑。本文的目的，就是由此出發，想把它說個清楚。最後，也提供一些可用「平面族定理」處理的例子。

「平面族定理」的由來

在空間中的平面與直線的章節裡，常會遇到這樣的問題：

求過二平面 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 的交線，且過點 $Q(2,-1,-1)$ 的平面方程式。

如何解決這類問題呢？基本上有二種處理方式：

㈠先找到兩個平面交線的方向向量及交線上的一點坐標，就回歸到「求包含已知一線及線外一點的平面方程式」的問題類型。

解法如下：

$\because$ 兩平面交線 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}$ 同時垂直兩平面的法向量，故 $\overrightarrow{v}\,//\,(2,1,0)\times(0,1,2)=(2,-4,2)=2(1,-2,1)$，可取 $\overrightarrow{v}=(1,-2,1)$，接著在交線 L 取一點 P，因為須同時滿足 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$，故取 $z=0, y=0, x=2$，$\therefore P(2,0,0)$，所求平面包含直線 L 與點 $Q(2,-1,-1)$，因此法向量 $\overrightarrow{v}\times\overline{PQ}=(1,-2,1)\times(0,1,1)=(-3,-1,1)$，取 $\overrightarrow{n}=(3,1,-1)$ 所求平面方程式為 $3x+y-z-6=0$.

此法計算過程較為繁複，因此老師們多半會再介紹另一種作法：

㈡透過「平面族定理」，將過已知兩平面交線的任一平面，表示成這兩個平面的線性組合，再進行處理。

設所求的平面為 $(2x+y-4)+k(y+2z)=0$,

$\because$ 過點 $(2,-1,-1)$

$\therefore$ 代入上式，得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

所求平面方程式為

$$(2x+y-4)+(-\frac{1}{3})(y+2z)=0,$$

即

$$3x+y-z-6=0.$$

這個方法雖然快速，卻有著許多環節必須詳加說明，像是

什麼是平面族？

為什麼過已知兩平面交線的任何平面，一定可以表示成這兩個平面的線性組合呢？

這些問題都需要解釋清楚，第一個問題只是定義的問題，倒是容易交代。我們是這麼定義

「平面族」的：通過一條直線之所有平面所成的集合叫做平面族。而第二個問題則是困惑著許多人：利用「線性組合」來建構一個新的平面的概念，是由何而來呢？總不會憑空冒出的吧？課本早將這個主題略而不提，而能查到的資料通常都是「事後諸葛亮」的作法，只告訴我們兩件事：

⑴利用兩平面方程式的線性組合所作出的方程式仍是個平面。

⑵它也會包含這已知兩平面的交線。

在這篇文章中，筆者試圖對這件事做個說明，而非只是給個「事後諸葛亮」的證明。

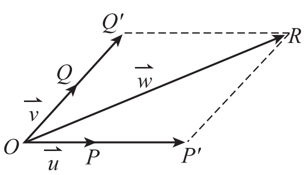
事實上，利用第三冊數學課本所學的知識就足夠我們將這個概念引發出來，我們需要用什麼觀念呢？先來複習一下。

㈠向量的線性組合

所謂的向量，就是同時具有大小及方向的量。在平面上，若我們給定兩個不平行的向量 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$，透過向量係數積及加法的性質，我們極易證出下列的性質：

在 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 所決定的平面上，任一個向量 $\overrightarrow{w}$ 均可寫成 $r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$，其中 $r, s\in R$，而 $r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$ 的形式就稱為 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 的線性組合。

【證明】如圖 1 所示，



▲圖 1

我們不妨設 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v}=\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{w}=\overrightarrow{OR}$，由於 O、P、Q、 R 四點在同一平面上，因此，我們可以過 R 作一直線與直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 平行，交直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 於 Q'；作一直線與直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 平行，交直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 P'。由於 P' 在直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 上，所以 $\overrightarrow{OP'}=r\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{u}$。同理，$\overrightarrow{OQ'}=s\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{v}$。

由向量的加法，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}\Rightarrow\overrightarrow{w}=r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$。同時，對每一個向量 $\overrightarrow{w}=r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$，只要 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行，則 r 與 s 是唯一決定的。也就是說，設 $\overrightarrow{w}=r_1\overrightarrow{u}+s_1\overrightarrow{v}=r_2\overrightarrow{u}+s_2\overrightarrow{v}$，得 $(r_1-r_2)\overrightarrow{u}=-(s_1-s_2)\overrightarrow{v}$，若 $r_1-r_2\neq 0$，則 $\overrightarrow{u}=-\dfrac{s_1-s_2}{r_1-r_2}\overrightarrow{v}$，所以 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$，這與假設 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行矛盾。因此 $r_1=r_2\Rightarrow s_1=s_2$。

利用兩個不平行向量的線性組合，可以表示同一平面上的任意向量，這個性質對於我們理解本文的主題是個很重要的切入點。

㈡平面方程式

想要描述空間中的平面方程式，向量的觀念更是不可或缺，我們正是利用與平面垂直的向量（稱為法向量 $\overrightarrow{n}$）來決定平面的方向性，而每一個平面方程式也決定了它的法向量：

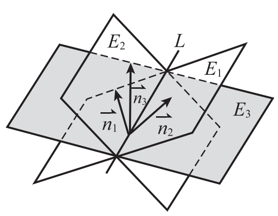
⑴通過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 而與非零向量 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 垂直的平面方程式為

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

⑵空間中每一個平面的方程式都具有 $ax+by+cz+d=0$ 的形式，其中 a, b, c 不全為 0，且 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 為這個平面的法向量。

好了，該是將平面族的觀念引出的時候。讓我們回到最開始的情況吧！

如圖 2，



▲圖 2

已知平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 相交於 L，則 $\overrightarrow{n_1}=$

(a_1, b_1, c_1)，$\overrightarrow{n_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 為平面 E_1 與 E_2 的法向量。設過交線 L 的任一平面為 E_3，且 $\overrightarrow{n_3}$ 為平面 E_3 的法向量。由於 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$ 和 $\overrightarrow{n_3}$ 均垂直於直線 L，所以三個向量共平面。（不妨想像三個向量可自由移動，從 L 上同一點出發）由向量的線性組合可知

$$\overrightarrow{n_3}=\alpha\overrightarrow{n_1}+\beta\overrightarrow{n_2}=\alpha(a_1, b_1, c_1)+\beta(a_2, b_2, c_2)$$
$$=(\alpha a_1+\beta a_2, \alpha b_1+\beta b_2, \alpha c_1+\beta c_2).$$

設 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為 L 上的一點。因此，平面 E_3 的方程式可以寫成

$$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z$$
$$=(\alpha a_1+\beta a_2)x_0+(\alpha b_1+\beta b_2)y_0+(\alpha c_1+\beta c_2)z_0,$$

以 α, β 為準，整理得

$$\alpha[(a_1x+b_1y+c_1z)-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0)]$$
$$+\beta[(a_2x+b_2y+c_2z)-(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0)]=0,$$

又 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為 L 上的一點，當然也滿足平面 E_1 與 E_2 的方程式，所以

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0,$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0.$$

代入上式，即得

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

因此，「過兩已知平面交線的任意平面可以寫成這兩個平面的線性組合。」這個推論看來就自然而然了。不過，如何保證這個推論會成立呢？這得需要好好證明一下，以下就是這個定理的證明。

「平面族」定理的證明

【定理】假設給定兩個平面方程式

$$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases},$$

則通過這兩個平面的交線 L 的平面族方程式必可寫成以下的形式：

$$\alpha E_1+\beta E_2=0\ (\alpha^2+\beta^2\neq 0),$$

亦即，

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$
$$(\alpha^2+\beta^2\neq 0)\cdots(*)$$

【證明】整個定理的證明可分為三部分：

(1)上面的方程式(*)一定是表示平面方程式；

(2)方程式(*)一定會通過 E_1 與 E_2 的交線 L；

(3)證明任何通過 L 的平面均可寫成方程式(*)的形式。

(1)方程式(*)一定是表示平面方程式

當 $\alpha=0$，$\beta\neq 0$ 時，方程式(*)為平面 E_2。

當 $\alpha\neq 0$，$\beta=0$ 時，方程式(*)為平面 E_1。

當 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ 時，方程式(*)可寫成一般式：$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z+(\alpha d_1+\beta d_2)=0$，此方程式的 x、y、z 係數不全為零。(Why？)

Ans：若方程式的 x、y、z 係數全為零，則 $\alpha a_1+\beta a_2=\alpha b_1+\beta b_2=\alpha c_1+\beta c_2=\alpha d_1+\beta d_2=0$

$\Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，即平面 E_1 與 E_2 平行。（與已知矛盾）

可見方程式(*)是 x、y、z 的一次方程式，所以它表示平面方程式。

(2)方程式(*)所表示的平面一定會通過 E_1 與 E_2 的交線 L

這顯然是成立的！因為直線 L 是平面 E_1 與 E_2 的交線，則 L 上的任一點〔設為 $P(x_0, y_0, z_0)$〕均會滿足平面 E_1 與 E_2 的方程式。所以

$a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0$ 且 $a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0$

$\Rightarrow \alpha(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)+\beta(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)$

$=0$ 滿足方程式(*)。

因此，方程式(*)所表示的平面都通過直線 L。

(3)任何通過 L 的平面均可寫成方程式(*)的形式

也就是任何過 L 的平面，必有不全為零的 α 與 β，可寫成方程式(*).

當平面 E 是平面 E_1 時，取 $\alpha = 1, \beta = 0$ 就可以了。

當平面 E 是平面 E_2 時，取 $\alpha = 0, \beta = 1$ 就可以了。

當平面 E 不為 E_1 與 E_2 時，取平面 E 上，不在 L 的一點 $Q(x_0, y_0, z_0)$，由於 Q 不在 E_1 與 E_2 上（∵ Q 不在 L 上），所以 $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 \neq 0$ 且 $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 \neq 0$.

我們取

$$\alpha = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2,$$
$$\beta = -(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1),$$

則滿足

$$(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2)(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1) + [-(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1)](a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2) = 0$$

也就是

$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$的形式。

所以過交線 L 的平面均可寫成方程式(*)。

綜合上述(1)、(2)、(3)可知，方程式(*)表通過平面 E_1 與 E_2 之交線的平面族方程式。

在上述證明中，各位也看到：對於不是 E_1 與 E_2 的平面，則均為 $\alpha \neq 0$ 與 $\beta \neq 0$ 的情形。所以我們可以將方程式(*)調整成

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \frac{\beta}{\alpha}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \cdots (**),$$

如果令 $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$，則方程式變成

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \cdots (***),$$

所以當我們所求平面不為 E_1 與 E_2 的平面時，可以直接將平面族方程式令為方程式(***)。

同樣的道理，我們也可用向量來表示平面上的直線方程式， $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n} = (a, b)$ ，因此由上面的討論，我們不難類推「直線系」概念的由來，此處就不再多談。

【定理】假設給定兩個直線方程式

$$\begin{aligned} L_1 &: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 &: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned},$$

則通過這二個直線交點 P 的直線系方程式必可寫成以下的形式： $\alpha L_1 + \beta L_2 = 0$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$)，亦即，

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 = 1) \cdots (*).$$

接著我們來看些可用「平面族定理」解決的問題吧！例題一是個常見的例子。

【例題一】求過二平面 $3x + y - z + 1 = 0$ 、$x + y + z = 0$ 的交線，且與平面 $2x - y + 3z - 1 = 0$ 垂直的平面方程式。

【解法一】設已知二平面 $3x + y - z + 1 = 0$ 、$x + y + z = 0$ 的交線 L ，則 L 的方向向量

$$\overrightarrow{v} \,//\, (3, 1, -1) \times (1, 1, 1) = 2(1, -2, 1),$$

故取方向向量 $\overrightarrow{v} = (1, -2, 1)$。且由聯立方程組

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 & \cdots ① \\ x + y + z = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② $\Rightarrow 4x + 2y + 1 = 0$,

可取 $x = 0, y = -\dfrac{1}{2}$，則 $z = \dfrac{1}{2}$.

故點 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 在 L 上。依題意，所求平面包含 L ，且垂直平面 $2x - y + 3z - 1 = 0$, 則其法向量 $\overrightarrow{n} \perp (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{n} \perp (2, -1, 3)$, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \,//\, (1, -2, 1) \times (2, -1, 3) &= (-5, -1, 3) \\ &= -(5, 1, -3), \end{aligned}$$

取 $\overrightarrow{n} = (5, 1, -3)$.

又點 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 也在平面上，因此，所求平面為

$$5x+y-3z+2=0.$$

【解法二】根據平面族定理，設所求的平面方程式為

$$(3x+y-z+1)+k(x+y+z)=0$$

$$\Rightarrow (3+k)x+(1+k)y+(-1+k)z+1=0,$$

則此平面的法向量為 $(3+k,1+k,-1+k)$,

依題意，由向量的內積

$$2(3+k)+(-1)(1+k)+3(-1+k)=0$$

$$\Rightarrow 4k+2=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2},$$

$\therefore$所求的平面方程式為 $5x+y-3z+2=0$.

事實上，由於空間中的直線方程式可表示成兩面式，讓我們常在求與直線條件有關的平面方程式問題上，應用平面族的概念。看看下面的例子：

【例題二】試求包含 x 軸，且過點 $A(1,-1,2)$ 的平面方程式。

【解法一】先在 x 軸上取一點 $B(1,0,0)$，且 x 軸的方向向量為 $\vec{v}=(1,0,0)$，由於所求平面包含 x 軸，並過 $A(1,-1,2)$，所以其平面的法向量 $\vec{n} // \vec{v} \times \overrightarrow{AB}=(1,0,0)\times(0,1,-2)=(0,2,1)$。

故取 $\vec{n}=(0,2,1)$

$\therefore$平面方程式為 $2y+z=0$.

【解法二】由於 x 軸的直線方程式可寫成 $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$（兩面式），根據平面族定理，包含 x 軸的任意平面可以寫成 $y+kz=0$，將$(1,-1,2)$代入，得 $k=\frac{1}{2}$，所以平面方程式為

$$y+\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow 2y+z=0.$$

【例題三】求直線 L ：$\begin{cases} x-y+z-6=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases}$ 在平面 E ：$x+y-z=0$ 的正射影直線 L' 的方程式。

【解法一】由於兩點決定一直線，不妨找出 L 上的兩相異點，例如點 $A(2,-4,0)$， $B(3,-2,1)$ 在 L 上，再求其在平面 E 上的投影點，則投影點會落在 L' 上。

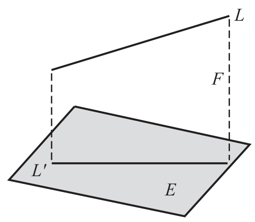
以求點 A 在平面 E 的投影點 A' 為例。由於直線 $\overleftrightarrow{AA'}$ 垂直平面 E，所以直線 $\overleftrightarrow{AA'}$ 的參數式為

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-4+t,\ t\in \boldsymbol{R}, \\ z=-t \end{cases}$$

因此可設點 $A'(2+t,-4+t,-t)$，又點 A' 在平面 E 上，故代入平面方程式，得 $t=\frac{2}{3}$，所以 $A'(\frac{8}{3},\frac{-10}{3},\frac{-2}{3})$。同理，可得點 B 在平面 E 的投影點 $B'(3,-2,1) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3})$，可取直線的方向向量$(1,4,5)$, 故直線 L 在平面 E 的投影直線為

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}.$$

【解法二】如圖 3，設 F 為包含直線 L 且與平面 E 垂直的平面。由於直線 L 在平面 E 上的投影直線 L'，恰為平面 E 與平面 F 的交線。故求出平面 F 即可。



▲ 圖 3

由於平面 F 過直線 L，根據平面族定理，可設

$$F:(x-y+z-6)+k(y-2z+4)=0$$

$$\Rightarrow x+(-1+k)y+(1-2k)z+(-6+4k)=0,$$

故法向量為 $(1,-1+k,1-2k)$,

又平面 F 垂直平面 E，故

$$(1,-1+k,1-2k)\cdot(1,1,-1)=0 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

因此，平面 F 的方程式為

$$(x-y+z-6)+\frac{1}{3}(y-2z+4)=0$$

$$\Rightarrow 3x-2y+z-14=0,$$

故投影直線 L' 的方程式為

$$\begin{cases}3x-2y+z-14=0\\ x+y-z=0\end{cases},$$

（這與解法一的答案是等價的！）.

【例題四】包含直線 L_1 ： $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$ 與直線 L_2 ： $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{6}$ 的平面方程式。

【解法一】由題意可知 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$，點 $A(-1,3,2)$在 L_1 上； L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(2,4,6)$，點 $B(2,-1,3)$在 L_2 上。所以欲求之平面的法向量 $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{AB}=(1,2,3)\times(3,-4,1)=(14,8,-10)=2(7,4,-5)$，故取 $\overrightarrow{n}=(7,4,-5)$, 故所求平面方程式為

$$7x+4y-5z+5=0.$$

【解法二】設所求之平面上有一點 $P(x,y,z)$ ，依題意可知 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$，點 $A(-1,3,2)$在 L_1 上； L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(2,4,6)$，點 $B(2,-1,3)$在 L_2 上。則 $\overrightarrow{AB}=(3,-4,1)$， $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$， $\overrightarrow{AP}=(x+1,y-3,z-2)$ 共平面。故

$$\begin{vmatrix}x+1 & y-3 & z-2\\ 3 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -14(x+1)-8(y-3)+10(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 7x+4y-5z+5=0,$$

故所求平面方程式為 $7x+4y-5z+5=0.$

【解法三】我們可將 L_1 改寫成兩面式

$$\begin{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}\\ \frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y+5=0\\ 3y-2z-5=0\end{cases},$$

根據平面族定理，過 L_1 的平面方程式可設為

$$(2x-y+5)+k(3y-2z-5)=0,$$

又包含 L_2 ，故將點 $B(2,-1,3)$代入平面方程式，得 $k=\frac{5}{7}$ 。

故欲求平面方程式為

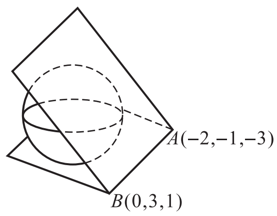
$$(2x-y+5)+\frac{5}{7}(3y-2z-5)=0$$

$$\Rightarrow 7x+4y-5z+5=0.$$

除了上述的例題外，求包含二相交直線的平面方程式，也可應用平面族的概念呢！請自行找個題目試試看！接下來，看個與球面相切之平面方程式的問題：

【例題五】已知球面方程式為$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$，求包含 $A(-2,-1,-3)$、 $B(0,3,1)$兩點，且與球面相切的平面方程式？

（分析）如圖可知，過 A 、 B 兩點且與球面相切的平面有兩種情形。



▲ 圖 4

【解法一】設所求平面與球面的切點$P(a,b,c)$，且球心為 $Q(1,1,1)$， $\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，則平面的法向量 $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{QP}=(a-1,b-1,c-1)$，因此，

(1) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QP}=0$

$\Rightarrow a+2b+2c-5=0\cdots①$

(2) $\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{PA}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PA}=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+a+2c-6=0\cdots②$

(3)點 $P(a,b,c)$ 在球面上

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2\cdots③$

② − ③　 $3a+2b+4c-7=0\cdots④$

④ − ①　$2a+2c-2=0 \Rightarrow c=1-a$，代入①，

得 $a=2b-3$，所以 $c=4-2b$，代入③，

$$(2b-4)^2+(b-1)^2+(3-2b)^2=2$$

$$\Rightarrow 3b^2-10b+8=0 \Rightarrow b=2 \text{ 或 } b=\frac{4}{3},$$

當 $b=2$ ，則 $a=1$ ， $c=0$ ，所以切點 $P(1,2,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=(0,1,-1)$，所以取平面法向量 $\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$，所求平面方程式為

$$y-z-2=0.$$

當 $b=\frac{4}{3}$，則 $a=-\frac{1}{3}$，$c=\frac{4}{3}$，所以切點 $P(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=(-\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}(4,-1,-1)$ 所以取平面法向量 $\overrightarrow{n}=(4,-1,-1)$，所求平面方程式為

$$4x-y-z+4=0.$$

【解法二】設所求平面與球面的切點 $P(a,b,c)$，且球心為 $Q(1,1,1)$， $\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，則切平面方程式為

$$(a-1)(x-1)+(b-1)(y-1)+(c-1)(z-1)=2$$

$$\Rightarrow (a-1)x+(b-1)y+(c-1)z+(1-a-b-c)=0\cdots(*),$$

所以法向量 $\overrightarrow{n}=(a-1,b-1,c-1)$ 因此，

⑴ $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (a-1,b-1,c-1)\cdot(2,4,4)=0$

$\Rightarrow a+2b+2c-5=0$

⑵點 $A(-2,-1,-3)$ 在平面上，代入(*)

$\Rightarrow 3a+2b+4c-7=0$

⑶點 $P(a,b,c)$ 在球面上

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$

上述所得條件式與解法一相同，就不再詳解。

【解法三】由於過 A、B 兩點可決定一直線，故所求平面可應用平面族定理寫出，再由與球面相切決定之。已知球心為 $Q(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，先求出直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的對稱比例式為

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2},$$

則其兩面式可表示成

$$\begin{cases}\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-y+3=0\\ y-z-2=0\end{cases},$$

根據平面族定理，包含直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面可寫成

$$(2x-y+3)+k(y-z-2)=0$$

$$\Rightarrow 2x+(k-1)y-kz+(3-2k)=0$$

與球面相切，所以

$$d(Q,E)=\frac{|2+(k-1)-k+3-2k|}{\sqrt{4+(k-1)^2+k^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow k=\frac{1}{2},$$

所以，與球面相切的平面方程式為

$$(2x-y+3)+\frac{1}{2}(y-z-2)=0$$

$$\Rightarrow 4x-y-z+4=0.$$

看到此處，不知你的心中是否出現疑問：在一開頭的分析中不是圖示了兩個切平面嗎？那另一個呢？

藉這個機會提醒大家：當我們將所求平面設成 $(2x-y+3)+k(y-z-2)=0$ 時，其實會有個包含直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面是不在我們所設的情況之中。不妨再回到證明討論的那一段看看！正是 $y-z-2=0$ 。這也是各位在使用平面族定理需要注意的地方。驗證一下：球心 $Q(1,1,1)$到平面 $y-z-2=0$ 的距離正是 $\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ 。

當然了，若一開始平面設成 $(y-z-2)+k(2x-y+3)=0$，就不會有上述的情形。此時，求出的 k 值為

⑴ $k=0$ ，則切平面為 $y-z-2=0$ ；

⑵ $k=2$ ，則切平面為 $4x-y-z+4=0$ 。

事實上，除了上述的問題外，平面族定理對於我們理解三元一次聯立方程組的幾何意義與行列式表示法之間的連結，有著很大的助益。這是接下來筆者所要討論的部分。

三元一次聯立方程組之解的幾何意義

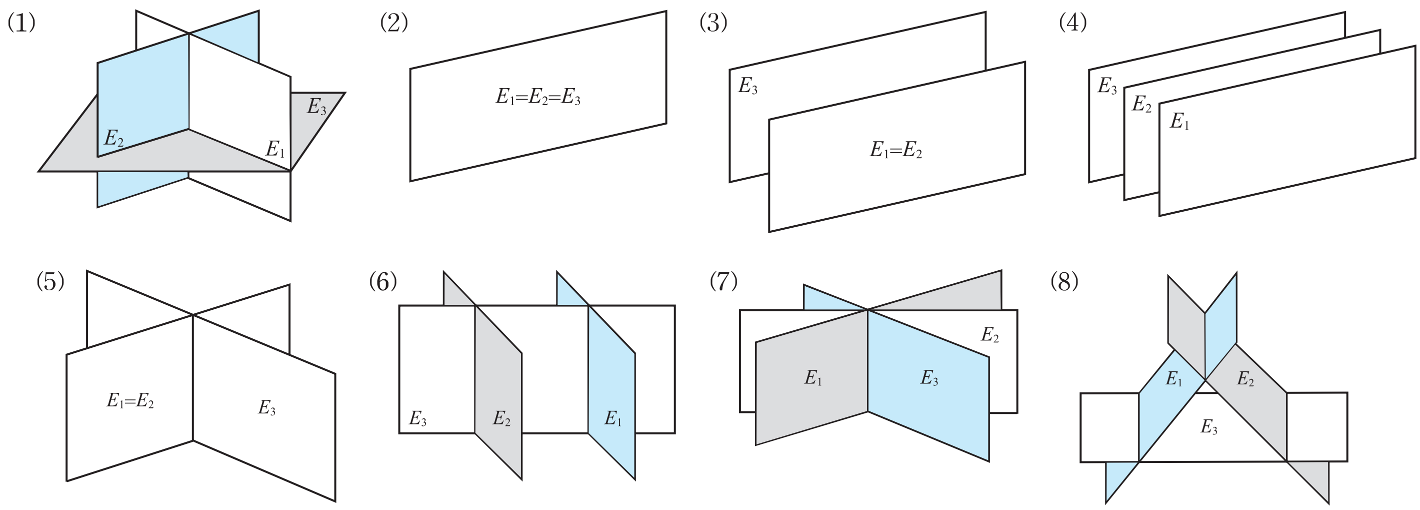
由於方程式 $ax+by+cz+d=0$ 的幾何意義代表空間中的一個平面，因此三元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解，就是要找出空間中三平面

$$\begin{cases} E_1 : a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2 : a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3 : a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的共同交點坐標。如何求解？解的型態為何？課程安排上是由行列式的觀點切入，得到一般性的判斷準則。課本有詳細過程，此處不加贅述，主要結論及對應圖形整理表列如表(一)所示：

三平面的關係	聯立方程組解的情形	行列式的表示法
(1)三平面交於一點	恰有一解	$\Delta \neq 0$
(2)三平面重合	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(3)兩平面重合，第三平面平行	無解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(4)三平面平行	無解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(5)兩平面重合，第三平面與其交一直線	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(6)兩平面平行，第三平面與其各交一直線	無解	$\Delta=0$，且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0
(7)三平面交於一直線	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(8)三平面兩兩相交一直線且三直線平行	無解	$\Delta=0$，且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0

▲表(一)



然而，我們想將空間中三平面的相交情形與行列式的表示法建立關係時，關係(1)可由克拉瑪公式來看出；關係(2)至(6)恰為三平面間的平行與重合，與平面方程式係數是否成比例有關，容易與行列式的運算性質銜接，而關係(7)和(8)則是較難直接從行列式的運算性質看出結果，但是由平面族定理則會變得非常容易理解。

以關係(7)－三相異平面交於一線為例，由於 E_1、E_2 及 E_3 相交於一線，所以 E_3 可以表成 $\alpha E_1+\beta E_2$，也就是說平面 E_3 的方程式

$$a_3x+b_3y+c_3z-d_3=0$$

與

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$$

等價。故

$$\frac{a_3}{\alpha a_1+\beta a_2}=\frac{b_3}{\alpha b_1+\beta b_2}=\frac{c_3}{\alpha c_1+\beta c_2}=\frac{d_3}{\alpha d_1+\beta d_2}=t$$

所以

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\t(\alpha a_1+\beta a_2)&t(\alpha b_1+\beta b_2)&t(\alpha c_1+\beta c_2)\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\t(\alpha d_1+\beta d_2)&t(\alpha b_1+\beta b_2)&t(\alpha c_1+\beta c_2)\end{vmatrix}=0$$

同理，$\Delta_y=0$，$\Delta_z=0$

至於關係(8)－三平面兩兩相交於一直線且三直線平行，則可由關係(7)加以延伸，由圖(8)觀察可以看到 E_3 恰與某一個過 E_1 與 E_2 交線的平面 $\alpha E_1+\beta E_2$ 平行，即平面 $a_3x+b_3y+c_3z-d_3=0$ 與平面 $\alpha(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$ 平行，故 $\dfrac{a_3}{\alpha a_1+\beta a_2}=\dfrac{b_3}{\alpha b_1+\beta b_2}=\dfrac{c_3}{\alpha c_1+\beta c_2}\neq\dfrac{d_3}{\alpha d_1+\beta d_2}$。所以 $\Delta=0$，而且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0。

再一次看見「平面族定理」的威力了吧！找幾個例題來實地演練一下。

【例題六】試判斷聯立方程組

$$\begin{cases}x+2y+z=7\cdots①\\2x+y-z=5\cdots②\\7x+8y+z=31\cdots③\end{cases}$$

所表示的三平面關係。

【解】因為方程式的係數並無成比例的關係，可判斷無平行或重合的關係，不是關係(2)到關係(6)！

考慮係數行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\7&8&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ 表示不是關係(1)，再來決定是關係(7)（無限多解）或是關係(8)（無解）。

再來，由三個平面法向量的線性組合，考慮 $\alpha(1,2,1)+\beta(2,1,-1)=(7,8,1)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=7\\2\alpha+\beta=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\\beta=2\end{cases}$ 所以① × 3 + ② × 2 得，

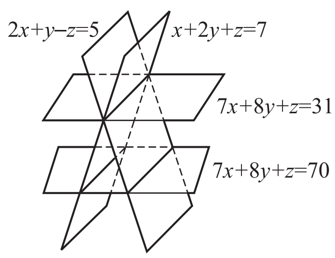
$7x+8y+z=31\cdots④$

由於④式與③式相等。表示③式可以寫成①式與②式的線性組合。

由平面族定理可知：三平面交於一線，故無限多解。

接著考慮以下狀況：若將題目中的③式改成 $7x+8y+z=70$，則結果為何呢？

如此一來，則④式 // ③式，如圖 5，表示三平面兩兩交於一線，三交線平行，無解。



▲圖 5

【例題七】若方程組 $\begin{cases} 5x+3y-\ \ z=-1 \cdots ① \\ 2x+\ \ y+2z=\ \ a \cdots ② \\ \ \ x+4y+bz=\ 10 \cdots ③ \end{cases}$ 有無限多解，試求 $a=$ ？，$b=$ ？

【解】依題意，由方程式係數可看出三平面相異，又有無限多解，表示三平面交於一線。故考慮法向量的線性組合

$\alpha\,(5\,,3\,,-1)+\beta\,(2\,,1\,,2)=(1\,,4\,,b\,)$

$\begin{cases} 5\alpha+2\beta=1 \\ 3\alpha+\ \ \beta=4 \\ -\alpha+2\beta=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=7 \\ \beta=-17 \end{cases}$，故 $b=-41$

又① × 7 + ② × (– 17) 得方程式

$$x+4y-41z=-7+(-17)a$$

與③式同義，故

$$-7+(-17)a=10 \Rightarrow a=-1.$$

結論

走筆至此，關於平面族定理的種種討論也該告一段落了。我們由向量的運算性質出發，指出了平面族定理的由來，進而討論三元一次聯立方程組解的幾何意義。不知是否看出筆者最想與各位分享的心得——『概念連結』。這也是數學教學過程中，必須想方設法與學生分享的部分，如此一來，才能引領學生將所學得的主題貫穿起來，從而產生源源不斷學習的喜悅！

後記

本文能得以完成，必須感謝中山女高鄭金樹老師的鼓勵。在他的指導與帶領下，讓筆者不論在教材或是教法上，有了更多的想法與成長。藉此機會特別謝謝他！

$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 與 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 三角函數複數極式值之探討

◎甘明濬、吳智善、張鴻偉、黃書恆
（以上按姓氏筆劃順序排列）
指導老師：蔡東憲

一、研究動機

高一下，老師教複數的極式，解 $x^n=1$ 知其根為 $1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$ ($w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$), 這些根在複數平面上所代表的點分別為 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$。並且藉由計算知 $\overline{A_kA_0}=2\sin\frac{k\pi}{n}$ ，所以 $\overline{A_1A_0}+\overline{A_2A_0}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_0}=2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ ，我們可以由積與和差之轉換得知此答案為 $2\cot\frac{\pi}{2n}$ ；但是若將上述改為 $\overline{A_1A_0}^m+\overline{A_2A_0}^m+\cdots+\overline{A_{n-1}A_0}^m=2^m\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ ($m, n\in N, n>\frac{m}{2}$)是否可得到較簡化的答案？ $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 是否也有令人驚喜的答案？於是我們開始招兵買馬,一同為解決這個問題而奮鬥。

二、研究目的

㈠利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}$ 、 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}$ 的和及 $\sin^m\theta$ 的表式，進而求出 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 的和。

㈡利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}$ 的和及 $\cos^m\theta$ 的表式，進而求出 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 的和。

㈢利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ 的和，求出 $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{j\pi}{n}$ 的和。

㈣利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{n}$ 的和，求出 $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{j\pi}{n}$ 的和。

三、四個引理

為求得 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ ，我們必須先證明下面四個引理

㈠引理一：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\begin{cases}n-1 & \text{（當 } m \text{ 是 } 2n \text{ 倍數），}\\ -1 & \text{（當 } m \text{ 非 } 2n \text{ 倍數且 } m \text{ 是偶數），}\\ 0 & \text{（當 } m \text{ 是奇數），}\end{cases}\qquad (\ m, n\in N \text{ 且 } n\geq 2\ )$$

證明：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{2m\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{m(n-1)\pi}{n}$$

$$=\frac{\sin\frac{3m\pi}{2n}-\sin\frac{m\pi}{2n}+\sin\frac{5m\pi}{2n}-\sin\frac{3m\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{(2mn-m)\pi}{2n}-\sin\frac{(2mn-3m)\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

$$=\frac{\sin(m-\frac{m}{2n})\pi-\sin\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

(1) 當 m 是 $2n$ 的倍數

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}1=n-1$$

(2) 當 m 非 $2n$ 倍數且 m 為偶數時，設 $m=2r,\ r\in N$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\frac{\sin(2r-\frac{m}{2n})\pi-\sin\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}=\frac{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}=-1$$

(3) 當 m 是奇數時，設 $m=2r-1,\ r\in N$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\frac{\sin(2r-1-\frac{m}{2n})\pi-\sin\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}=\frac{0}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}=0$$

(二)引理二：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\begin{cases}0 & （m\text{ 是 }2n\text{ 倍數}）, \\ 0 & （\text{當 }m\text{ 非 }2n\text{ 倍數且 }m\text{ 是偶數}）, \\ \cot\frac{m\pi}{2n} & （m\text{ 是奇數}）,\end{cases}\qquad （m,n\in N\text{ 且 }n\geq 2）$$

證明：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{2m\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}$$

$$=\frac{\cos\frac{3m\pi}{2n}-\cos\frac{m\pi}{2n}+\cos\frac{5m\pi}{2n}-\cos\frac{3m\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)m\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-3)m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

$$=\frac{\cos(m-\frac{m}{2n})\pi-\cos\frac{m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

(1) 當 m 是 $2n$ 的倍數時， $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}0=0$

(2) 當 m 非 $2n$ 倍數且 m 是偶數時，設 $m=2r,\ r\in N$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\frac{\cos(2r-\frac{m}{2n})\pi-\cos\frac{m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}=0$$

(3) 當 m 為奇數時，設 $m=2r-1,\ r\in N$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\frac{\cos(2r-1-\frac{m}{2n})\pi-\cos\frac{m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}=\cot\frac{m\pi}{2n}$$

㈢引理三：

$$\sin^m\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(\dfrac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是偶數），}\\ \dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin3\theta+C^m_{\frac{m-5}{2}}\sin5\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是奇數），}\end{cases}$$

首先我們先觀察下面幾個例子：

(1) $\sin\theta=\sin\theta$

(2) $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}=\dfrac{\dfrac{C^2_1}{2}-C^2_0\cos2\theta}{2}$

(3) $\sin^3\theta=\sin^2\theta\times\sin\theta=\dfrac{C^3_1\sin\theta-C^3_0\sin3\theta}{2^2}$

(4) $\sin^4\theta=\sin^3\theta\times\sin\theta=\dfrac{\dfrac{C^4_2}{2}-C^4_1\cos2\theta+C^4_0\cos4\theta}{2^3}$

(5) $\sin^5\theta=\sin^4\theta\times\sin\theta=\dfrac{C^5_2\sin\theta-C^5_1\sin3\theta+C^5_0\sin5\theta}{2^4}$

(6) $\sin^6\theta=\sin^5\theta\times\sin\theta=\dfrac{\dfrac{C^6_3}{2}-C^6_2\cos2\theta+C^6_1\cos4\theta-C^6_0\cos6\theta}{2^5}$

藉由觀察以上幾個例子，我們做了以下的猜測：

$$\sin^m\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(\dfrac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是偶數），}\\ \dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin3\theta+C^m_{\frac{m-5}{2}}\sin5\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是奇數），}\end{cases}$$

(7) 證明我們的猜測是正確的

(a)當 m 是偶數時

假設 $\sin^m\theta=\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(\dfrac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta\right)$ 成立，

則 $\sin^{m+1}\theta=\sin^m\theta\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2^{m-1}}\left[\dfrac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}\sin\theta-\dfrac{C^m_{\frac{m-2}{2}}}{2}(\sin3\theta-\sin\theta)+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0}{2}(\sin(m+1)\theta-\sin(m-1)\theta)\right]$

$=\dfrac{1}{2^m}\left[C^{m+1}_{\frac{m}{2}}\sin\theta-C^{m+1}_{\frac{m-2}{2}}\sin3\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^{m+1}_0\sin(m+1)\theta\right]$

為當初猜測 $m+1$ 為奇數的情形，

(b)當 m 是奇數時

假設 $\sin^m\theta=\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin3\theta+C^m_{\frac{m-5}{2}}\sin5\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta\right)$ 成立，

則 $\sin^{m+1}\theta=\sin^m\theta\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2^{m-1}}\left[C^m_{\frac{m-1}{2}}\times\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+C^m_{\frac{m-3}{2}}\times\dfrac{1}{2}(\cos4\theta-\cos2\theta)+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\times\dfrac{1}{2}C^m_0(\cos(m+1)\theta-\cos(m-1)\theta)\right]$

$=\dfrac{1}{2^m}\left[C^m_{\frac{m-1}{2}}-C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}C^m_0\cos(m+1)\theta\right]$

$=\dfrac{1}{2^m}\left[\dfrac{C^{m+1}_{\frac{m+1}{2}}}{2}-C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}C^{m+1}_0\cos(m+1)\theta\right]$

為當初猜測 $m+1$ 為偶數的情形，

所以我們完成引理三的證明。

㈣引理四：

$$\cos^{m}\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(\dfrac{C^{m}_{\frac{m}{2}}}{2}+C^{m}_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^{m}_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是偶數），}\\[2ex] \dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C^{m}_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta+C^{m}_{\frac{m-3}{2}}\cos3\theta+C^{m}_{\frac{m-5}{2}}\cos5\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是奇數），}\end{cases}$$

首先我們觀察下面幾個例子：

(1) $\cos\theta=\cos\theta$

(2) $\cos^{2}\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=\dfrac{\frac{C^{2}_{1}}{2}+C^{2}_{0}\cos2\theta}{2}$

(3) $\cos^{3}\theta=\cos^{2}\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2^{2}}(C^{3}_{1}\cos\theta+C^{3}_{0}\cos3\theta)$

(4) $\cos^{4}\theta=\cos^{3}\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2^{3}}(\dfrac{C^{4}_{2}}{2}+C^{4}_{1}\cos2\theta+C^{4}_{0}\cos4\theta)$

(5) $\cos^{5}\theta=\cos^{4}\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2^{4}}(C^{5}_{2}\cos\theta+C^{5}_{1}\cos3\theta+C^{5}_{0}\cos5\theta)$

藉由觀察以上幾個例子,我們做了以下的猜測：

$$\cos^{m}\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m-1}}\left(\dfrac{C^{m}_{\frac{m}{2}}}{2}+C^{m}_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^{m}_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是偶數），}\\[2ex] \dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C^{m}_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta+C^{m}_{\frac{m-3}{2}}\cos3\theta+C^{m}_{\frac{m-5}{2}}\cos5\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta\right) & \text{（當 } m \text{ 是奇數），}\end{cases}$$

(6) 證明我們的猜測是正確的

(a)當 m 是偶數時

假設 $\cos^{m}\theta=\dfrac{1}{2^{m-1}}(\dfrac{C^{m}_{\frac{m}{2}}}{2}+C^{m}_{\frac{m-2}{2}}\cos2\theta+C^{m}_{\frac{m-4}{2}}\cos4\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta)$ 成立，

則 $\cos^{m+1}\theta=\cos^{m}\theta\times\cos\theta$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C^{m}_{\frac{m}{2}}}{2}\cos\theta+\frac{C^{m}_{\frac{m-2}{2}}}{2}(\cos3\theta+\cos\theta)+\cdots+\frac{C^{m}_{0}}{2}(\cos(m+1)\theta+\cos(m-1)\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{m}}\left[C^{m+1}_{\frac{m}{2}}\cos\theta+C^{m+1}_{\frac{m-2}{2}}\cos3\theta+\cdots+C^{m+1}_{0}\cos(m+1)\theta\right]$$

為當初猜測 $m+1$ 是奇數的情形，

(b)當 m 是奇數時

假設 $\cos^{m}\theta=\dfrac{1}{2^{m+1}}(C^{m}_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta+C^{m}_{\frac{m-3}{2}}\cos3\theta+C^{m}_{\frac{m-5}{2}}\cos5\theta+\cdots+C^{m}_{0}\cos m\theta)$ 成立，

則 $\cos^{m+1}\theta=\cos^{m}\theta\times\cos\theta$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C^{m}_{\frac{m-1}{2}}}{2}(1+\cos2\theta)+\frac{C^{m}_{\frac{m-3}{2}}}{2}(\cos4\theta+\cos2\theta)+\cdots+\frac{C^{m}_{0}}{2}(\cos(m+1)\theta+\cos(m-1)\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{m}}\left[\frac{C^{m+1}_{\frac{m+1}{2}}}{2}+C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos2\theta+\cdots+C^{m+1}_{0}\cos(m+1)\theta\right]$$

為當初猜測 $m+1$ 是偶數的情形，

所以我們完成引理四的證明。

四、主要研究內容

㈠定理一：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\dfrac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n & （當 m 是偶數且 n>\dfrac{m}{2}）, \\ \dfrac{1}{2^{m-1}}(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cot\dfrac{\pi}{2n}-C^m_{\frac{m-3}{2}}\cot\dfrac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\cot\dfrac{m\pi}{2n}) & （當 m 是奇數）,\end{cases} \quad (m,n\in N,n\geq 2)$$

首先我們來觀察以下的一些例子：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\cot\frac{\pi}{2n}$

(2) $\because \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}=\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$$

(3) $\because \sin^3\theta=\frac{C^3_1\sin\theta-C^3_0\sin3\theta}{2^2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^3\frac{k\pi}{n}=\frac{C^3_1}{2^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}-\frac{C^3_0}{2^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{3k\pi}{n}=\frac{C^3_1}{2^2}\cot\frac{\pi}{2n}-\frac{C^3_0}{2^2}\cot\frac{3\pi}{2n}$$

(4) $\because \sin^4\theta=\dfrac{\frac{C^4_2}{2}-C^4_1\cos2\theta+C^4_0\cos4\theta}{2^3}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^4\frac{k\pi}{n}=\frac{C^4_2}{2^4}(n-1)-\frac{C^4_1}{2^3}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+\frac{C^4_0}{2^3}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{4k\pi}{n}$$

(a)當 $n=2\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{1}\sin^4\frac{k\pi}{2}=\frac{C^4_2}{2^4}(1)-\frac{C^4_1}{2^3}(-1)+\frac{C^4_0}{2^3}(1)=1\neq\frac{C^4_2}{2^4}\times 2$

(b)當 $n=4\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{3}\sin^4\frac{k\pi}{4}=\frac{C^4_2}{2^4}(3)-\frac{C^4_1}{2^3}(-1)+\frac{C^4_0}{2^3}(-1)=\frac{C^4_2}{2^4}\times 4$

(c)當 $n\geq 5\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin^4\frac{k\pi}{n}=\frac{C^4_2}{2^4}(n-1)+\frac{C^4_1}{2^3}-\frac{C^4_0}{2^3}=\frac{C^4_2}{2^4}n$

∴我們將 n 限定為大於 2 的正整數

(5) $\because \sin^5\theta=\frac{C^5_2\sin\theta-C^5_1\sin3\theta+C^5_0\sin5\theta}{2^4}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^5\frac{k\pi}{n}=\frac{C^5_2}{2^4}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}-\frac{C^5_1}{2^4}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{3k\pi}{n}+\frac{C^5_0}{2^4}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{5k\pi}{n}$$
$$=\frac{C^5_2}{2^4}\cot\frac{\pi}{2n}-\frac{C^5_1}{2^4}\cot\frac{3\pi}{2n}+\frac{C^5_0}{2^4}\cot\frac{5\pi}{2n}$$

(6) $\because \sin^6\theta=\dfrac{\frac{C^6_3}{2}-C^6_2\cos2\theta+C^6_1\cos4\theta-C^6_0\cos6\theta}{2^5}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^6\frac{k\pi}{n}=\frac{C^6_3}{2^6}(n-1)-\frac{C^6_2}{2^5}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+\frac{C^6_1}{2^5}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{4k\pi}{n}-\frac{C^6_0}{2^5}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{6k\pi}{n}$$

(a)當 $n=2\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{1}\sin^6\frac{k\pi}{2}=\frac{C^6_3}{2^6}-\frac{C^6_2}{2^5}(-1)+\frac{C^6_1}{2^5}(1)-\frac{C^6_0}{2^5}(-1)=1\neq\frac{C^6_3}{2^6}\times 2$

(b)當 $n=3\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{2}\sin^6\frac{k\pi}{3}=\frac{C^6_3}{2^6}\times 2-\frac{C^6_2}{2^5}(-1)+\frac{C^6_1}{2^5}(-1)-\frac{C^6_0}{2^5}\times 2=\frac{27}{32}\neq\frac{C^6_3}{2^6}\times 3$

(c)當 $n=6\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{5}\sin^6\frac{k\pi}{6}=\frac{C^6_3}{2^6}(5)-\frac{C^6_2}{2^5}(-1)+\frac{C^6_1}{2^5}(-1)-\frac{C^6_0}{2^5}(-1)=\frac{C^6_3}{2^6}\times 6$

∴我們將 n 限定為大於 3 的正整數

(d)當 $n>3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\sin^6\frac{k\pi}{n}=\frac{C_3^6}{2^6}(n-1)-\frac{C_2^6}{2^5}(-1)+\frac{C_1^6}{2^5}(-1)-\frac{C_0^6}{2^5}(-1)=\frac{C_3^6}{2^6}n$

(7) 藉由觀察以上幾個例子，我們做了以下的猜測：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\dfrac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n & （當 m 是偶數且 n>\dfrac{m}{2}）, \\ \dfrac{1}{2^{m-1}}\left(C_{\frac{m-1}{2}}^m\cot\dfrac{\pi}{2n}-C_{\frac{m-3}{2}}^m\cot\dfrac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_0^m\cot\dfrac{m\pi}{2n}\right) & （當 m 是奇數）,\end{cases}\quad (m,n\in N,n\geq 2)$$

(8) 證明我們的猜測是正確

(a)當 m 是偶數且 $n>\frac{m}{2}$ 時

$\because \sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2}-C_{\frac{m}{2}-2}^m\cos2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C_0^m\cos m\theta\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2}(n-1)-C_{\frac{m}{2}-2}^m(-1)+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C_0^m(-1)\right]=\frac{1}{2^m}\cdot C_{\frac{m}{2}}^m\cdot n$

(b)當 m 是奇數時

$\because \sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}\left[C_{\frac{m-1}{2}}^m\sin\theta-C_{\frac{m-3}{2}}^m\sin3\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_0^m\sin m\theta\right]$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[C_{\frac{m-1}{2}}^m\cot\frac{\pi}{2n}-C_{\frac{m-3}{2}}^m\cot\frac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_0^m\cot\frac{m\pi}{2n}\right]$

於是我們完成定理一的證明。

(二)定理二

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\dfrac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n-1 & （當 m 是偶數且 n>\dfrac{m}{2}）, \\ 0 & （當 m 是奇數）,\end{cases}\quad (m,n\in N,n\geq 2)$$

首先我們來觀察以下的例子：

(1) $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}=0$

(2) $\because \cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-1$

(3) $\because \cos^3\theta=\frac{C_1^3\cos\theta+C_0^3\cos3\theta}{2^2}\quad \therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^3\frac{k\pi}{n}=\frac{0}{2^2}=0$

(4) $\because \cos^4\theta=\frac{1}{2^3}\left[\frac{C_2^4}{2}+C_1^4\cos2\theta+C_0^4\cos4\theta\right]$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^4\frac{k\pi}{n}=\frac{C_2^4}{2^4}(n-1)+\frac{C_1^4}{2^3}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+\frac{C_0^4}{2^3}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{4k\pi}{n}$

(a)當 $n=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1}\cos^4\frac{k\pi}{2}=\frac{C_2^4}{2^4}+\frac{C_1^4}{2^3}(-1)+\frac{C_0^4}{2^3}=0\neq\frac{C_2^4}{2^4}\cdot 2-1$

(b)當 $n>2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\cos^4\frac{k\pi}{n}=\frac{C_2^4}{2^4}(n-1)+\frac{C_1^4}{2^3}(-1)+\frac{C_0^4}{2^3}(-1)=\frac{C_2^4}{2^4}n-1$

$\therefore$我們將 n 限定為大於 2 的正整數

(5) $\because \cos^5\theta=\frac{1}{2^4}(C_2^5\cos\theta+C_1^5\cos3\theta+C_0^5\cos5\theta)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^5\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2^4}\left(C_2^5\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}+C_1^5\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{3k\pi}{n}+C_0^5\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{5k\pi}{n}\right)=0$

(6) $\because \cos^6\theta = \frac{1}{2^5}\left(\frac{C_3^6}{2} + C_2^6\cos 2\theta + C_1^6\cos 4\theta + C_0^6\cos 6\theta\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^6\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^5}\left[\frac{C_3^6}{2}(n-1) + C_2^6\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} + C_1^6\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{4k\pi}{n} + C_0^6\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{6k\pi}{n}\right]$

(a)當 $n=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1}\cos^6\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{2^5}\left[\frac{C_3^6}{2} + C_2^6(-1) + C_1^6(1) + C_0^6(-1)\right] = 0 \neq \frac{C_3^6}{2^6}\times 2 - 1$

(b)當 $n=3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2}\cos^6\frac{k\pi}{3} = \frac{1}{2^5}\left[\frac{C_3^6}{2}\cdot 2 + C_2^6(-1) + C_1^6(-1) + C_0^6\cdot 2\right] = \frac{1}{2^5} \neq \frac{C_3^6\cdot 3}{2^6} - 1$

(c)當 $n > \frac{6}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\cos^6\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^5}\left[\frac{C_3^6}{2}(n-1) + C_2^6(-1) + C_1^6(-1) + C_0^6(-1)\right] = \frac{C_3^6}{2^6}n - 1$

∴我們限定 n 是大於 $\frac{6}{2}$ 的正整數

(7) 藉由觀察以上幾個例子，我們做了以下的猜測：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n - 1 & （當\ m\ 是偶數且\ n > \frac{m}{2}）, \\ 0 & （當\ m\ 是奇數）, \end{cases} \quad (m, n \in N, n \geq 2)$$

(8) 證明我們的猜測是正確

(a)當 m 是偶數且 $n > \frac{m}{2}$ 時，$\because \cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2} + C_{\frac{m-2}{2}}^m\cos 2\theta + \cdots + C_0^m\cos m\theta\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n} = \frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}(n-1) + \frac{1}{2^{m-1}}C_{\frac{m-2}{2}}^m(-1) + \cdots + \frac{C_0^m}{2^{m-1}}(-1) = \frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n - 1$

(b)當 m 是奇數時，$\because \cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\left(C_{\frac{m-1}{2}}^m\cos\theta + C_{\frac{m-3}{2}}^m\cos 3\theta + \cdots + C_0^m\cos m\theta\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n} = \frac{0}{2^{m-1}} = 0$

於是我們完成定理二證明。

五、結論及應用

(1) 藉由四個引理的輔助，我們證明下列：

(a) $$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n & （當\ m\ 是偶數且\ n>\frac{m}{2}）, \\ \frac{1}{2^{m-1}}\left(C_{\frac{m-1}{2}}^m\cot\frac{\pi}{2n} - C_{\frac{m-3}{2}}^m\cot\frac{3\pi}{2n} + \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}C_0^m\cot\frac{m\pi}{2n}\right) & （當\ m\ 是奇數）, \end{cases} \quad (m,n\in N,\ n\geq 2)$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \frac{C_{\frac{m}{2}}^m}{2^m}n - 1 & （當\ m\ 是偶數且\ n > \frac{m}{2}）, \\ 0 & （當\ m\ 是奇數）, \end{cases} \quad (m, n \in N, n \geq 2)$$

(2) $\because (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^2 = \sum_{k=1}^{n-1}a_k{}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}a_ia_j$

$\therefore \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{j\pi}{n} = \frac{1}{2}\left(\cot^2\frac{\pi}{2n} - \frac{n}{2}\right)$

$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{j\pi}{n} = \frac{-1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{-n}{4} + \frac{1}{2}$

參考資料

余文卿　等著「高中數學第二、四冊」，龍騰文化。

再看《黃金比例》

◎梁勇能／台中一中

前言

黃金比例：$\phi = 1.61803\cdots$，相對於另一個童叟皆知的常數 π，顯然遜色不少，但是對於藝術家、哲學家、音樂家、建築師……等人而言，ϕ 的魅力反倒是其他數字所難以出其右的，到底黃金比例是如何引領風騷數千年？讓許多人對它難以忘懷，又何以有幸能冠上「黃金」二字頭銜，是否為前人溢美之辭，抑或恰如其分地襯托出價值，且讓這本以「黃金比例」為核心的數學簡史，作為讀者客觀判斷的參考！

一、登場

作者 M. Livio 透過其洗鍊的文筆，娓娓道來黃金比例的崛起過程，以及在歷史上所扮演的角色！ϕ 的初登場在何時？未必可考，但在西元前三百年左右，歐幾里德（Eulid）倒是替黃金比例下了第一個定義，他利用一直線的「中末比」，即「直線的中末比分割指該直線的全長和分割後較長的線段之比＝長線段和短線段的比」來定義，但是他並未替 ϕ 冠上「黃金」二字，在本書作者的考證下，德國數學家歐姆(Martin Ohm. 1789-1854)（註1）是使用「黃金分割」的第一人，爾後，諸如「黃金數字」、「黃金分割」甚至「神的比例」等名詞都陸續被人使用。但最重要的是什麼原因使得這個數字如此令人興奮，受到這麼多的注意？原因或許是黃金比例總是以出奇不意的方式出現在世人眼前，這是它魅力之所在。

大自然的現象中，舉凡多室的鸚鵡螺，隨著外殼的擴增。小室的半徑會以黃金比例增加，另外植物的葉序，向日葵小花的排列，螺旋星系的漩渦，物理上的準晶體，都有它的痕跡。此外，在各式各樣的人造物件和藝術品中，為了視覺或聽覺的和諧效果，也有意或無意間和 ϕ 扯上關係。作者詳盡地考證藝術作品後，發現有些宣稱是依「黃金比例」而製作的作品，未必真正符合 ϕ 的要求。因此，作者在書中花了不少篇幅去探討是否所有的文獻中所引用的黃金比例案例，無論自然界或藝術作品都經得起考驗嗎？這是相對於一般介紹「黃金比例」的文章中，較少提及的，換言之，一些筆者原本對於 ϕ 的觀念，將在作者的文章中受到挑戰，這也是最吸引我的地方！

二、黃金比例的原罪

在中學時的課本中，告訴我們希臘著名的巴特農神殿的建造乃是依照黃金比例所設計，或許這也是當時國立編譯館引用國外資料所致。一九九二年，緬因州立大學的數學家馬考斯基在《關於黃金比例的錯誤觀念》中指出，部分的巴特農神殿並不符合黃金矩形，但是熱衷於黃金比例的人都對此一概忽略。換言之，或許巴特農神殿是在有心人以「黃金比例」的放大鏡去觀看，才得

到的諸如此類的說法吧！

這樣的情形也發生在其他的領域，尤其是藝術作品上。文藝復興時期引發了黃金比例歷史的上一個重大轉向，讓黃金比例的觀念不再侷限於數學上，也能夠用於藝術的解釋。但是如同建築的結構設計相似，是否真正地包含黃金比例於其中，同樣打上一個大問號？如同作者所說：「藝術家也瘋狂？」，很多的藝術家也抱著黃金比例的大腿，希望和 ϕ 扯上關係。推究其原因，也許牽涉到人們對美的追求，而黃金比例是最佳的選擇，但是否真的如此？也許從「黃金矩形」的研究中可以獲得一些端倪。假設黃金比例是最具吸引力的，那依照黃金比例所畫的黃金矩形，自然將在矩形圈裡獨領風騷。但經過多個實驗的結果來看，卻未必如此。許福曼(H.R.Schiffman)在一項實驗中，要求受試者在一張紙上畫出「一個最有美感的矩形」，結果他們所畫的矩形長寬比是1.9，自然和 $\phi = 1.618\cdots$ 有段差距！因此，多倫多大學的心理學家高奎奇(Michael Godkewitsch)下結論說：「在西方世界中，關於『是否已經有一個可靠的陳述，可以表達出人們對於某種特殊的長寬比，具有美學上的偏愛？』這個基本問題，答案大概是沒有。」

除了繪畫之外，黃金比例的觸角也擴展至音樂、詩等，這些創作者希望將黃金比例這個美的規範轉換成實際的用途，但是作者卻認為需放棄這種想法，不要再將黃金比例當作是一成不變的標準應用在人的體態上，或是當作精緻藝術的檢驗標準，如同瑞士—法國建築師暨畫家科比意(Le Corbusier)所言：「不要讓黃金分割取代了我們鑑賞力裡的那種神秘體驗」。

三、本來無一物，何處惹塵埃

英國數學家哈地(Godfrey Harold Hardy, 1877-1947)說：「數學家的模式，就和畫家和詩人一樣，一定美麗無比」，以黃金比例當作例子再好不過了。不要刻意去「強調」黃金比例的存在，驀然回首，才發現它的無所不在！好比薩騰(May Sarton,1912～1995)所言：「我看到了宇宙中有一種秩序在，而數學是讓它現身的方法之一」。藉此，作者 Livio 在書尾以「上帝是一位數學家嗎？」，探討數學是否為萬能？衍生出數學究竟是「發現」或「發明」爭議論點，摒除這個無解的問題外，每個人都會同意隨著人類的探索，數學的威力是不斷在增強，黃金比例亦然！

結語

再也沒有比「書中自有黃金屋」這個形容詞更能詮釋這本書了。但此書的價值，除了「黃金」二字外，讓筆者獲益處在於：對於「在不疑處起疑」的要義有更深一層的體認，如同科學的精神在求真、求善、求美。在知識的範疇中，時時抱著質疑的態度來面對，否則就陷入像文藝復興時期的教廷人士一般，對於地球是宇宙中心之說深信不疑。當然，對於此書，比照辦理！

註解

[1] 此歐姆先生並非發現電阻定理的歐姆(George Simon Ohm)，但為兄弟關係。

參考文獻

[1] Mario Livio 著，邱宏義譯：《黃金比例 (The Golden Ratio)》。遠流出版社（臺北）。2004。

百位1是完全平方數嗎？

◎陳傳義／桃園高中

學校推出一道數學問題徵答，題目如下：

「試證明 11, 111, 1111, …, 111…11 (100 位) 等數都不是完全平方數」。

阿元和婷婷這兩個學生對於絞腦汁的事倒是頗有興趣的，放學後便相偕來找我。

阿元說：「老師，這個題目我們曾在其他學校的網頁上看過。」

「網頁上有解答嗎？」

「沒有。」

「還好，不然你們可就勝之不武了。」

婷婷說：「才不呢，就算有解答，我也要憑自己的腦袋做出來。」

「那麼，你們找到證法了嗎？」

阿元說：「我們兩人各有不同的想法。」

「好， 阿元先說。」

「我發現，這 99 個數都是奇數，假如是完全平方數的話，必是正奇數的平方。奇數可以表為 $2k+1$，這裡 k 是某個整數，平方後

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

表示奇數平方除以 4，餘數必定是 1。」

我讚許道：「有道理，奇數平方除以 4，餘數為 1。我們姑且稱為“阿元定理”。」

婷婷說：「哪有這麼簡單的定理？」

「嗯，那就謙虛一點，改叫“阿元引理”。偶數的平方又如何呢？婷婷，讓你來說。」

婷婷在紙上寫著：

$$(2k)^2 = 4k^2$$

「這容易。偶數的平方被 4 整除。」

「不錯，我們就稱為“婷婷引理”，以示公平。阿元，你繼續證下去。」

「題目中每個數除以 4 都餘 3，違反“阿元引理”，因此每個數都不是完全平方數。其實就算再多幾位也一樣。」

「正確。只要把“題目中每個數除以 4 都餘 3”這句話再解釋清楚一些(註)，就可以投稿應答了。那麼婷婷的方法呢？」

婷婷趕快說她的新發現：「老師，因為題目每個數的個位數都是 1，如果是某自然數 m 的平方，則 m 的個位數也是 1。我試算了幾個：

$11^2 = 121,\ 21^2 = 441,\ 31^2 = 961,\ 41^2 = 1681,\ 51^2 = 2601$

發現它們十位數都是偶數，而題目中每個數的十位數卻是 1，所以每一個都不可能是平方數。」

「你的理由有破綻， m^2 個位數是 1， m 的個位數卻未必為 1。」

婷婷有點兒意外：「還有什麼？」

阿元插嘴道「妳忘了 9。」

「對耶。你們等我一下下。」婷婷在紙上迅速算了起來：

$9^2 = 81,\ 19^2 = 361,\ 29^2 = 841,\ 39^2 = 1521,\ 49^2 = 2401$

「哈，十位數還是全部偶數。」

我再澆一盆冷水：「仍不算是周延的證明，

你只觀察五個數，就歸納推想：“個位數為 1 或 9 的自然數，平方後個位數是 1，十位數是偶數”，恐怕略嫌武斷。你需要更嚴密的說明。」

「啊？老師的意思是用數學歸納法嗎？這對我可就有點兒挑戰了。」

阿元說：「不用吧。如果自然數 m 的個位數為 1 或 9，可以表成 $m = 10k \pm 1$，而

$$m^2 = (10k \pm 1)^2 = 100k^2 \pm 20k + 1$$
$$= 10(10k^2 \pm 2k) + 1$$

很明顯，個位數就是 1。又其中 $10k^2 \pm 2k$ 的個位數就是 m^2 的十位數，而不論 k 是多少，$10k^2 \pm 2k$ 都是偶數，所以 m^2 的十位數必為偶數。」

婷婷嬌嗔地說：「阿元，你每次都這麼厲害，我嫉妒你。」

我開玩笑道：「女生太會嫉妒容易變醜，可就不妙了。」

婷婷挑釁地說：「阿元，我要考倒你。如果把這題的數字 1 改成其他數字，就是全部是 2，或全部是 3 等等，會不會出現平方數？」

阿元說：「我要去趕火車，我明天再告訴你好了。」

婷婷加大音量：「不行，你想不出來就不准回家。」

我說：「女生不要太兇，免得更快變醜。不過，婷婷衍生出另一個問題，倒也很有意思。為了敘述方便，我們就把 1111 稱為 4 位 1，22222 稱為 5 位 2，其餘依此類推。那麼婷婷的問題可以這樣敘述：n 位 p ($n \geq 2$，$p = 2, 3, \cdots, 9$) 是否為完全平方數？」

阿元想了一下，說：「n 位 5 和 n 位 9 也可以用前面的“阿元引理”解釋，所以同樣都不是完全平方數。而 n 位 2 和 n 位 6 是偶數，則可以用“婷婷引理”解釋，也都不是完全平方數。至於其他四種情形，就是 n 位 3、n 位 4、n 位 7 與 n 位 8，卻沒有違反這兩個引理。」

我問：「沒有違反是否表示皆為完全平方數？」

阿元說：「當然不對。例如33、44、77、88都不是完全平方數。所以如果有平方數存在，就要知道哪些是哪些不是，這可要傷腦筋了。」

這時婷婷埋頭振筆疾書，阿元湊過去靜觀。紙上寫著：

$(10k + 1)^2 = 100k^2 + 20k + 1$ ……個位數字 1
$(10k + 2)^2 = 100k^2 + 40k + 4$ ……個位數字 4
$(10k + 3)^2 = 100k^2 + 60k + 9$ ……個位數字 9
$(10k + 4)^2 = 100k^2 + 80k + 16$ ……個位數字 6
$(10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$ ……個位數字 5
$(10k + 6)^2 = 100k^2 + 120k + 36$……個位數字 6
$(10k + 7)^2 = 100k^2 + 140k + 49$……個位數字 9
$(10k + 8)^2 = 100k^2 + 160k + 64$……個位數字 4
$(10k + 9)^2 = 100k^2 + 180k + 81$……個位數字 1

「哈，我發現了：平方數的個位數不會出現 2、3、7、8，所以 n 位 3、n 位 7 和 n 位 8 絕不可能是完全平方數。糟糕，剩下 n 位 4 該怎麼辦呢？」

兩人皺眉苦思片刻，毫無進展。

「還是我來宣布結果吧，免得阿元趕不上火車，回家被罵。

其實 n 位 4 ($n \geq 2$)仍然不是完全平方數。」

「為什麼呢？」兩人異口同問。

「設 u_n 表 n 位 1 ($n \geq 2$)，則 n 位 4 就是 $4u_n$，假如它是完全平方數，則必是偶數 $2h$ 的平方，即

$$4u_n = (2h)^2 \ \Rightarrow \ u_n = h^2$$

我們會推出 n 位 1 也是完全平方數，違背了我們剛剛所獲得的結論。」

「哇，太神奇了，每位數字相同的正整數竟然都不是完全平方數。」婷婷的神情充滿發現的樂趣。

阿元急道：「我要走了， 我要走了，現在火車可不太會誤點吶。」

看著他們快速離去之後，我把婷婷的想法再略加深究，發現平方數的個位數為 1，5，9 時，十位數為偶數；個位數為 6 時，十位數為奇數，所以除了 n 位 4 之外，從末兩位數字都足以推出不是完全平方數。

古人說「教學相長」。今天我也該帶著豐收的神情下班吧。

註解

借用上文符號，定義 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$，因為 $u_n = 100 \cdot u_{n-2} + 11 = 4(25u_{n-2} + 2) + 3$，所以 $u_n(n \geq 2)$ 除以 4 都餘 3。

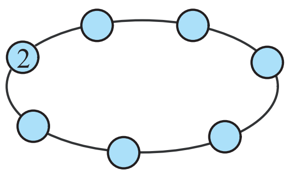
參考解答 問題集XII

誌謝

感謝全國師生對問題集的熱烈迴響！由於篇幅所限，我們實在無法將全部稿件一一刊載，敬請大家見諒。底下是所有參與問題集 XII 的師生名單，《數學新天地》謹此致上最深的謝意：

郭儒鍾老師／桃園高中；**胡照南**老師／台南高商；**蘇啟天**老師／高雄市三民高中；**鄭仕豐**老師／鹿港高中；**王憲津**／斗六高中；**張期博**／礁溪國中 2 年 6 班；**張嘉玲**／嘉義女中；**蘇智全**老師／台南高工；**楊椀軫**、**謝博欽**／台南高工電子一甲－**蘇智全**老師指導；**陳基正**老師／楠梓高中；**黃俊嶧**、**吳政逸**／鳳山高中 3 年 16 班－**連崇馨**老師指導；**王義富**、**陳柏翰**／林口高中 3 年 10 班；**許展瑞**／宜蘭高中 1 年 7 班；**柯鈞翊**／旗美高中 1 年 7 班；**張進安**／高雄市中正高中；**王香評**老師／台南一中；**李維昌**老師／宜蘭高中；**蔡崇敏**／師大附中高二 1114 班；**劉秉頤**老師／斗六高中（以上依進稿先後順序排列）

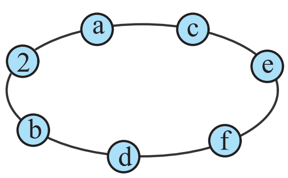
12-1. 奧修的念珠是由七顆精選的寶石串起來的，其中標示 2 的那顆寶石的重量為 2 克拉。



為了某種目的，這串念珠每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的幾何平均數。試求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

【解 1】（黃俊嶧、吳政逸／鳳山高中 3 年 16 班-連崇馨老師指導）

如圖，



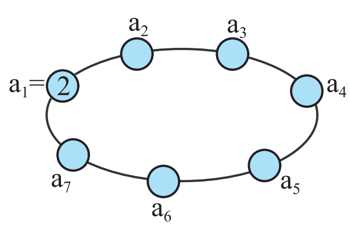
由題意可知 $\begin{cases} ab=4 \\ 2c=a^2 \\ ae=c^2 \\ cf=e^2 \\ de=f^2 \\ bf=d^2 \\ 2d=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{a^2}{2} \\ e=\dfrac{a^3}{4} \\ f=\dfrac{a^4}{8} \\ d=\dfrac{a^5}{16} \\ b=\dfrac{a^6}{32} \end{cases}$

又 $ab=4 \Rightarrow \dfrac{a^7}{32}=4 \Rightarrow a=2$（克拉），

再代回前面關係式得 $b=c=d=e=f=2$（克拉）.

【解 2】（鄭仕豐老師／鹿港高中）

設七顆念珠之重量分別為 $a_1=2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 克拉，如下圖所示，



我們依 a_1 與 a_2 之大小討論如下：

⑴ 若 $a_2 > a_1$ ，

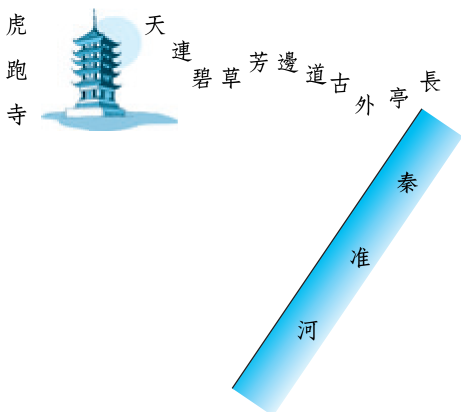
則∵ a_2 是 a_1 與 a_3 之幾何平均數，∴ $a_3 > a_2$ ；
又∵ a_3 是 a_2 與 a_4 之幾何平均數，∴ $a_4 > a_3$ ；
依此類推下去得 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_1$，此為矛盾。

⑵ 若 $a_2 < a_1$ ，

則∵ a_2 是 a_1 與 a_3 之幾何平均數，∴ $a_3 < a_2$ ；
又∵ a_3 是 a_2 與 a_4 之幾何平均數，∴ $a_4 < a_3$ ；
依此類推下去得 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_1$，此為矛盾。

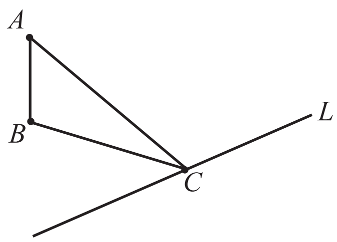
⑶ 由⑴與⑵得知 $a_1 = a_2$。同理可得 $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, $a_4 = a_5$, $a_5 = a_6$, $a_6 = a_7$ ，故知所有念珠之重量均為 2 克拉。 □

12-2. 如下圖所示，秦淮河遠處有一座虎跑寺。每年六月，附近即將畢業的小學生都會聚集在秦淮河左岸岸邊，準備參加游泳渡秦淮河比賽。當聽到虎跑寺樓頂響起〈驪歌〉「長亭外，古道邊，芳草碧連天，…」時，方可跳入河裡，游向對岸。最先抵達對岸者獲勝。



如果附近的河岸筆直，且寬度一樣，那麼在秦淮河左岸的哪個點準備跳河游向對岸最有利？

【解】（張嘉玲／嘉義女中）



假設塔頂為 A ，塔底為 B ，則最理想點 C 為 A 到秦淮河左河岸 L 的垂足，故運用三垂線定理來解題：過塔頂 A 點往地面做垂線，設垂足為 B，過 B 對 L 做垂線，得垂足 C 點，則 C 即為所求。 □

12-3. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13，這十三個數字分成三群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

【解】（王憲津／斗六高中）

$A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$　A 中任二數之差為 3 的倍數，皆不在 A 內。

剩下 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12，分成

$B = \{2, 3, 11, 12\}$

$C = \{5, 6, 8, 9\}$

明顯可看出任二數之差皆不在該群內。

其中 7 亦可放在 B 或 C 內。 □

12-4. 有某一個含有 n 個整數的集合，具下述性質：任何 $n-1$ 個整數的積與其餘那一個整數的差可被 n 整除。試證：此 n 個整數的平方和可被 n 整除。

【解 1】（蘇啟天／高雄市三民高中）

設 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$a_i \in Z$ ，$\forall i \in N$

$\because n \left| \dfrac{a_1\, a_2 \cdots a_n}{a_i} \right.$

$\Rightarrow n \mid a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - a_i^{\,2}, \forall i = 1, 2 \cdots n$

$\therefore n \mid a_1a_2a_3\cdots a_n - a_1^{\,2}$

$n \mid a_1a_2a_3\cdots a_n - a_2^{\,2}$

$\vdots$

$n \mid a_1a_2a_3\cdots a_n - a_n^{\,2}$

$\therefore n \mid n\cdot a_1a_2a_3\cdots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}$

$\therefore n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}$ □

【解 2】（王香評老師／台南一中）

設此 n 個數為 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ，依題意：

$$a_2a_3\cdots a_n \equiv a_1 \pmod{n}$$

$$a_1a_3\cdots a_n \equiv a_2 \pmod{n}$$

$$\vdots$$

$$a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n \equiv a_i \pmod{n}$$

$$\vdots$$

$$a_1a_2\cdots a_{n-1} \equiv a_n \pmod{n}$$

故

$$a_1a_2a_3\cdots a_n \equiv a_1^{\,2} \pmod{n}$$

$$a_1a_2a_3\cdots a_n \equiv a_2^{\,2} \pmod{n}$$

$$\vdots$$

$$a_1a_2a_3\cdots a_n \equiv a_n^{\,2} \pmod{n}$$

$$\Rightarrow n(a_1a_2a_3\cdots a_n) \equiv a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2} \pmod{n}$$

$\therefore n \mid a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}$ □

【解 3】（鄭仕豐老師／鹿港高中）

證明：設該集合含有 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 這 n 個整數，則由題意知

對於每一個 $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ，均存在一個整數 k_i 使得下式成立，

$$a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n - a_i = nk_i$$

移項後再乘以 a_i 得

$$a_i^{\,2} = a_1a_2\cdots a_n + nk_ia_i$$

相加得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} = n(a_1a_2\cdots a_n) + n\sum_{i=1}^{n} k_ia_i,$$

故知

$$n \mid \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right),$$

亦即，此 n 個整數的平方和可被 n 整除。 □

12-5. 一位父親臨終前就遺產分配給兒子的方式留下遺囑：第一個兒子分得 100 萬元與剩下遺產的十分之一；第二個兒子分得 200 萬元與剩下遺產的十分之一；第三個兒子分得 300 萬元與剩下遺產的十分之一；…；以此類推，所有的兒子分得的錢數正好相等。

請問：這位父親共有多少遺產？每人分得多少錢？

【解 1】（郭儒鍾老師／桃園高中）

設父親遺產共有 n 萬元, 且第 k 個兒子分得 a_k 萬元，由題意可知

$$a_1 = 100 + \frac{n-100}{10},$$

$$a_2 = 200 + \frac{n-a_1-200}{10}.$$

又每人分得的遺產相同，故 $a_1 = a_2$

將上二式移項整理得一方程組 $\begin{cases} 10a_1 = n + 900 \\ 11a_1 = n + 1800 \end{cases}$

解聯立得 $a_1 = 900,\ n = 8100$

即父親遺產共 8100 萬元, 且每人分得 900 萬元

□