

編輯室報告

喜閱數學、喜樂人生

本期《數學新天地》由師大數學系許志農教授策劃，本期焦點為許介彥老師的〈躲不掉的陷阱〉。 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 是常見也不奇妙的等比數列，但妙的是許老師在本文中以生動有趣的數學問題，帶領您依尋 Kronecker 的步伐，瞭解這道數學世界中的「躲不掉的陷阱」。

除了本期焦點之外，本期重要文章簡介如下：

立體幾何的學習，始終考驗著學生在平面與立體之間雙向溝通的能力。上期我們以林義強老師的〈圓錐截痕 with Dandelin sphere〉，分享利用 3D 繪圖工具精確描繪圓錐截痕之美；本期曾憲錠老師的〈和高中生談兩個有趣的立體幾何問題〉，則是引領我們拋開電腦輔助工具，使用人類最原始的紙筆能力，藉由徒手繪製的方式領略三度形體之美，同樣精彩可期。

延續上一期〈學習數學應注意的關卡〉，吳志揚教授與我們分享小學、國中到高中各階段學習數學應特別注意的關卡，本期是系列文章的第二篇，完整的說明數學學習的基本功夫。

〈師父中的師父〉專欄，本期分享的是〈與奇人相遇的故事〉。許志農教授藉由生活周遭偶爾瞥見的故事，與您分享數學世界的喜樂。

音樂學習的過程中有一個有趣的「卡農」練習。卡農並非曲名，而是一種曲式，字面上意思是「輪唱」。高一上學期所提到的級數求和，也同樣具有這種依次出現、交叉進行、互相追隨，給人綿延不斷的感覺。謝銘峰老師在本期的文章中深入剖析在級數求和裡令人驚喜的〈分解之美〉。對謝老師有興趣的讀者們也可在 bee 美麗之家 (<http://web.chsh.chc.edu.tw/bee/>) 中，與 bee 暢談數學之美。

次序性的教學方式在數學中當然是重要的，王素賢老師的〈結構化教材設計簡介〉藉由資訊科技將複雜的教材架構與學習目標抽絲剝繭，尋找清晰的脈絡，和您分享結構化教材設計的方法與步驟。

今年七月的指定考試結束，數學甲的多選第 9 題因為補習班所公布的答案與大考中心不同而造成話題，到底問題出在哪裡，沈朋裕老師在〈用 Lambert 定理作拋物線〉中，有精彩的討論。



發行人：李枝昌

編輯顧問：許志農

總編輯：吳淑芬

副總編輯：孫慧璟

責任編輯：蔡孟秀

美術編輯：彭文君

排版編輯：林雅琴

發行所：龍騰文化事業股份有限公司

地址：248 台北縣五股鄉五權七路 1 號

電話：(02)2299-9063

傳真：(02)2299-0197

創刊日：2002/10/1

出刊日：2005/10/1

網址：<http://www.lungteng.com.tw>

目次

CONTENTS

迴響	和高中生談兩個有趣的立體幾何問題 ▶▶ 曾憲錠／竹北高中、朱啟台	3
講座	學習數學應注意的關卡（二） ▶▶ 吳志揚／中正大學數學系	10
師父中的師父講堂	與奇人相遇的故事 ▶▶ 許志農／台灣師範大學數學系	14
本期焦點	躲不掉的陷阱 ▶▶ 許介彥／大葉大學電子工程學系	22
妙錦囊	分解之美 ▶▶ 謝銘峰／彰化高中	26
風潮	結構化教材設計簡介 ▶▶ 王素賢／惇敘工商	30
探索	用 Lambert 定理作拋物線——94 指考數甲試題的討論 ▶▶ 沈朋裕／建國中學	38
升學情報宅急便	國立臺灣師範大學數學系 93 學年度推薦甄選入學 指定項目甄試試題與詳解 ▶▶ 郭家瑋／臺灣師範大學數學系	41
問題集	問題集XI參考解答 ▶▶ 許紋潯老師／家齊女中 ▶▶ 黃嵩茗同學／中道中學高二愛班 ▶▶ 陳基正老師／善化高中 ▶▶ 蘇啟天老師／三民高中 ▶▶ 張進安老師／高雄市立中正高中	45
	問題集XII ▶▶ 許志農／臺灣師範大學數學系	48



和高中生談兩個有趣的立體幾何問題

◎曾憲銳／竹北高中、朱啟台

前言

對於立體幾何的學習，如何將立體圖形平面化，或者，從平面化的圖形想像立體的原貌，可說是一項有趣的挑戰。或許，我們可以一時逃避這項挑戰，透過實體模型或電腦動畫來理解立體模型，但我們通常只得到定性的、概略的感受，而無法進行定量的、精確的分析。模型與動畫雖引起了短暫而表面的學習興趣，卻不見得能得到長遠而深刻的結果。

在這篇文章裏，我們以圓錐截痕與正多面體這兩個經典的立體幾何問題作為例子，希望能引發學生徒手繪圖的興趣，並進一步以自己繪製的圖形為思考的平台，讓三度空間的形體在腦海中飛翔。

圓錐截痕

現行的高中教科書把拋物線、橢圓、雙曲線合稱為圓錐曲線，因為，如果拿平面去切割或砍劈雙圓錐，隨著切割的角度，切出來的痕跡剛好是圓、橢圓、拋物線或雙曲線。但大部分的學生並沒有親自檢驗過這件事的真實性，而只是被告知或被催眠有這麼一回事，我們希望透過紙筆的操作讓學生相信這件事。

我們將以時下一般教科書的定義作為推論的起點，然後證明圓錐截痕剛好是橢圓、雙曲線、或拋物線。

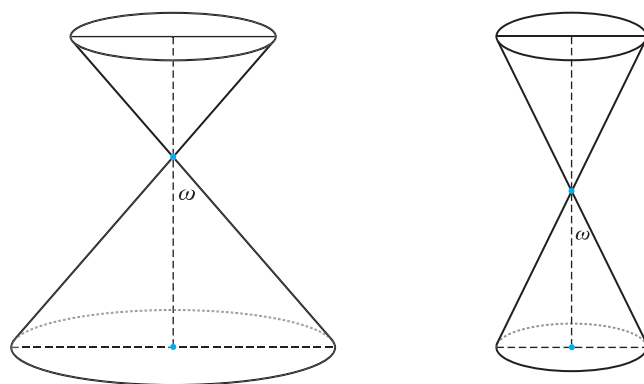
圓錐截痕的定義

橢圓：橢圓上任一點到兩個定點的距離和為定值。

雙曲線：雙曲線上任一點到兩個定點的距離差（一律取正值）為定值。

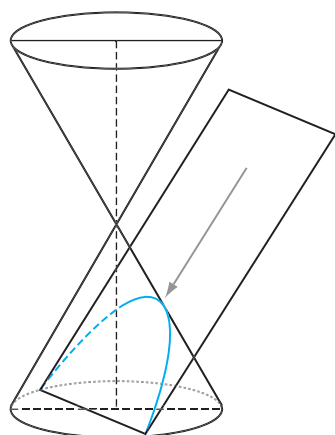
拋物線：拋物線上任一點到定點的距離等於到它到定直線的距離。

讓我們回憶一下雙圓錐的定義：有一個旋轉軸，軸上有一個點，過此點有一條母線，母線繞著軸旋轉一圈，其軌跡就是雙圓錐。旋轉軸與母線的夾角 ω 越小，雙圓錐的頂點就越尖銳。

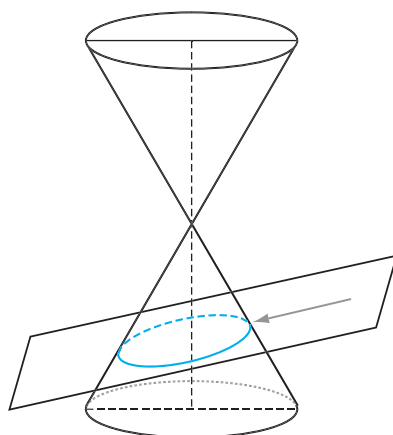


▲圖 1

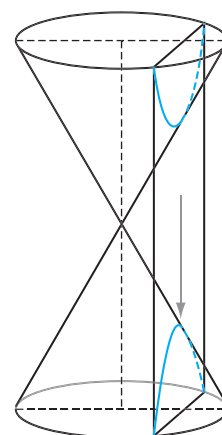
現在，我們拿一個平面來切割雙圓錐。假設切入點的位置不在頂點，而切入的角度最極端的狀況有二：水平的與鉛直的，從水平逐漸變化到鉛直的過程中，有一個切入角度是很特別的，也就是切入方向與母線平行。



▲圖 2



▲圖 3



▲圖 4

以下我們要證明三件事：

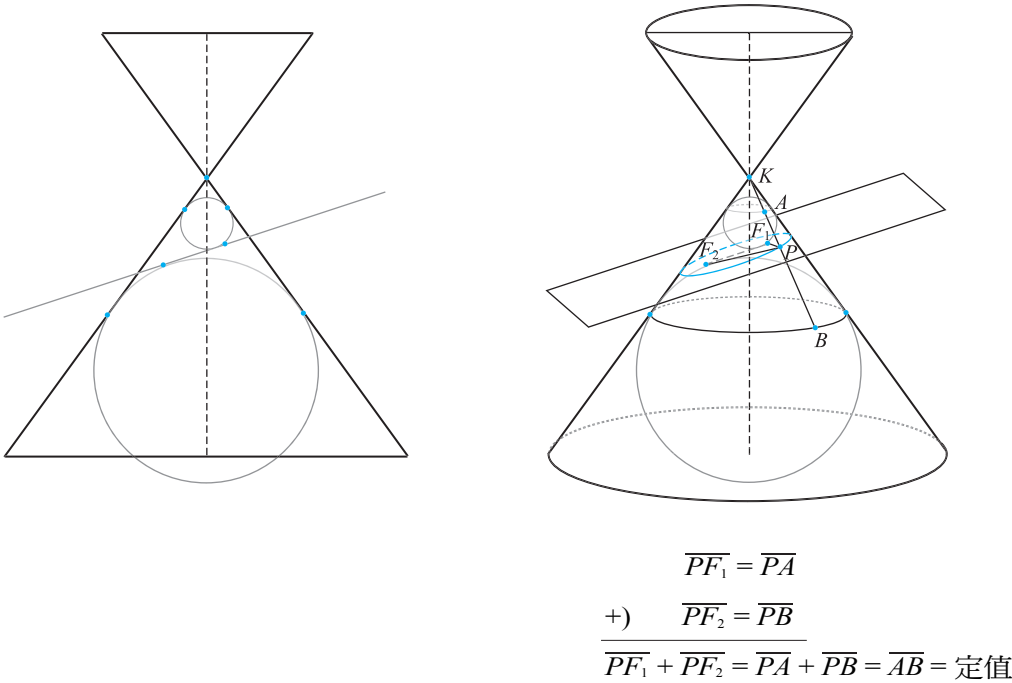
1. 當切入方向剛好平行母線時，截面與雙圓錐的交集是拋物線。
2. 當切入方向比較「平緩」，陡峭的程度還不到母線的時候，截面與雙圓錐的交集是橢圓。
3. 當切入方向比較「陡峭」，陡峭的程度已超過母線的時候，截面與雙圓錐的交集是雙曲線。

雖然我們先提到拋物線，但我們打算把拋物線的證明留到最後，先處理比較簡單的情況。

橢圓

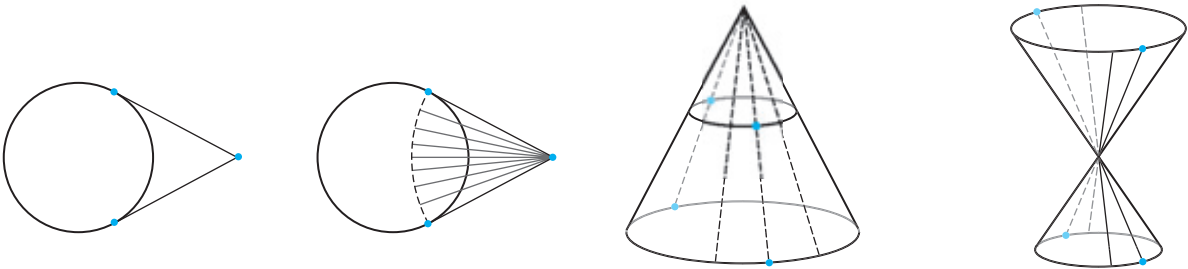
我們覺得，好的證明應該在直觀與嚴謹之中取得良好的平衡，而對於高中生或初學者而言，直觀的份量應該下得更重一些。因此，除了開頭一些口語化的說明之外，我們儘可能讓圖形自己說話，也就是俗稱的無字證明（proofs without words）。

如圖 5，下方的圓錐被截面分成兩個「房間」，分別在兩個房間置入內切球，這兩個球與截面的切點分別為 F_1, F_2 ，那麼，這兩點剛好會是橢圓的兩焦點。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線是幫助我們看清事實的關鍵。



▲圖 5

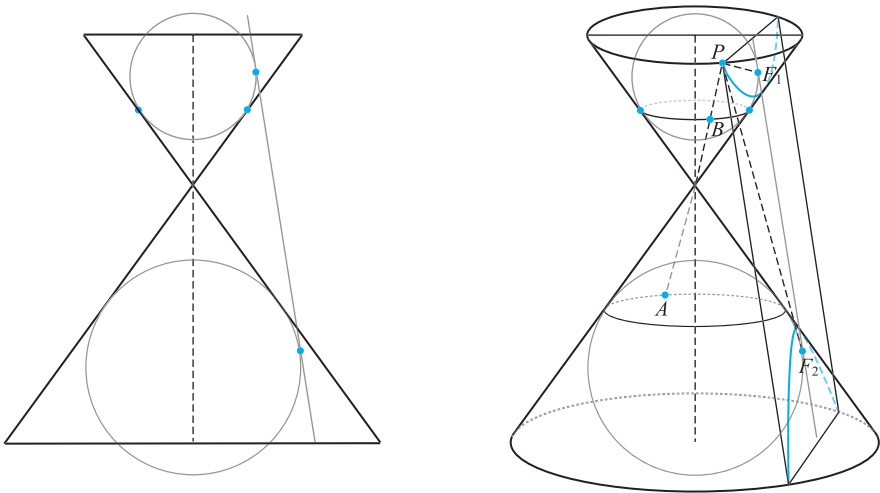
註：為了理解上述的等式，學生應該具備兩個背景知識，一個是「切線段等長」，一個是「母線段等長」，如圖 6 所示。



▲圖 6

雙曲線

如圖 7，雙圓錐被截面分成四個「房間」，分別在其中兩個包含頂點的房間置入內切球，這兩個球與截面的切點分別為 F_1, F_2 ，這兩點剛好是雙曲線的兩焦點。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線是幫助我們看清事實的關鍵。



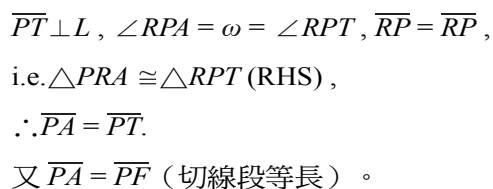
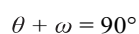
$$\begin{aligned} &\overline{PF_2} = \overline{PA} \\ -) &\overline{PF_1} = \overline{PB} \\ \hline &\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PA} - \overline{PB} = \overline{AB} = \text{定值} \end{aligned}$$

▲ 圖 7

拋物線

如圖 8，下方的圓錐被截面分成兩個「房間」，在其中包含頂點的房間置入內切球，它與截面的切點為 F 。接下來，考慮內切球與圓錐的交集（圓）所在的水平面，它與截面的交線為 L 。那麼， F 與 L 剛好是拋物線的焦點與準線。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線以及 P 點在「水平面」的垂足，這兩者是幫助我們看清事實的關鍵。

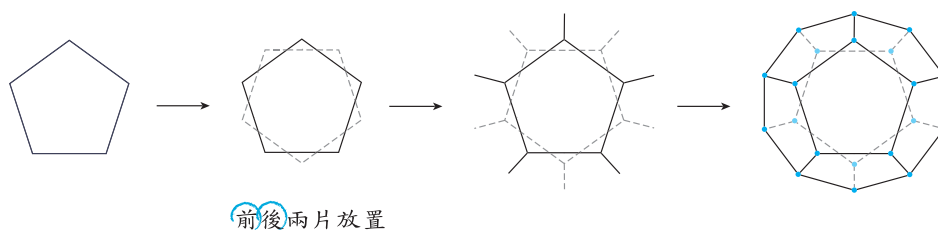
註： $\triangle PMR$ 與 $\triangle PTR$ 的全等看起來很自然，但嚴格說起來，其實是「兩面角」與「三垂線定理」這兩個概念的綜合應用。



▲圖 8

關於五個正多面體，我們特別想強調的是如何徒手繪製其示意圖，並進一步利用示意圖來驗證尤拉公式 $v - e + f = 2$ ，以及計算相鄰兩面的夾角。真正的挑戰在於正 12 面體與正 20 面體，因此我們將省略正 4、正 6、正 8 面體的狀況。

1. 繪圖程序



▲圖 9

2. 驗證尤拉公式： $v - e + f = 20 - 30 + 12 = 2$

3. 計算相鄰兩面的夾角：

如圖 10 所示，

$$\text{設 } \overline{AK} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 108^\circ} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

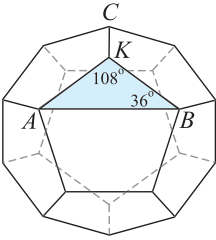


圖 10

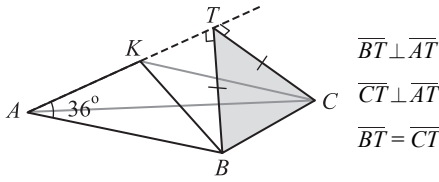


圖 11

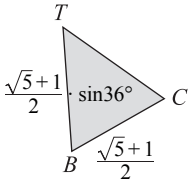


圖 12

邊長同除
 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

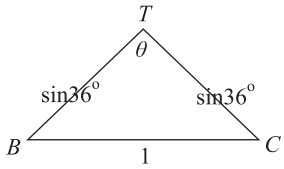
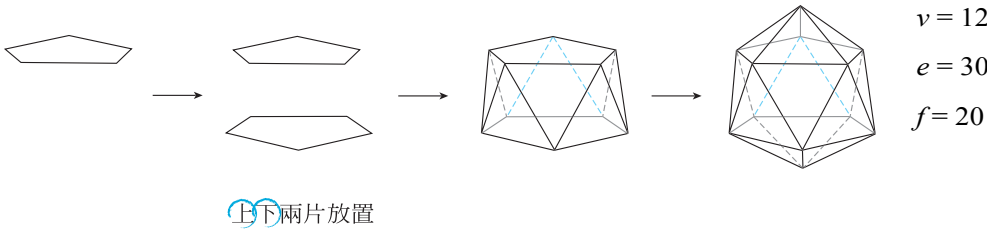


圖 13

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{\sin^2 36^\circ + \sin^2 36^\circ - 1^2}{2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 36^\circ} \\ &= \frac{\frac{10-2\sqrt{5}}{16} + \frac{10-2\sqrt{5}}{16} - 1}{2 \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \quad (\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

正 20 面體

1. 繪圖程序：

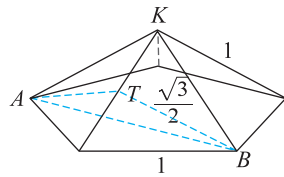


上下兩片放置

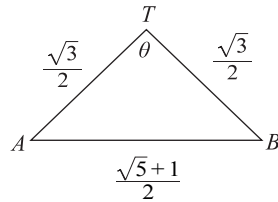
圖 14

2. 驗證尤拉公式： $v - e + f = 12 - 30 + 20 = 2$

3. 計算相鄰兩面的夾角：



▲ 圖 15



▲ 圖 16

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{6-6-2\sqrt{5}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{-\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

結語

不論工業技術與電腦軟體如何進步，紙筆作為思考的工具絕不會被時代淘汰，事實上，最深刻的文化成就常常是一張紙、一張紙所累積起來的，紙筆不但讓我們將知識輕鬆帶著走，也是人際溝通的重要媒介。

如果電影《明天過後》的預言成真，大自然奪走了人類所創造的一切身外之物，只要一根樹枝、一小片沙地，我們仍然能夠傳遞圓錐截痕與正多面體的概念，這就是紙筆原始卻恆久的力量。



學習數學應注意的關卡(二)

◎吳志揚／中正大學數學系

在上一篇文章中，我們首先提出學習數學應注意的一些入門關卡，如有效率而準確的計算能力與對小數的掌握等等。對一個國小五、六年級的小朋友來說，語文能力、理解力與記憶力的成熟度都已足夠用來進行簡單而初步的理性分析和資料整理與解讀。數學的學習隨著學生心智能力的成長，在廣度、深度與成熟度各方面的要求都必須加重與加強。數學的廣度指的是數學知識與概念的涵蓋面向是否夠多，而數學深度指的是對數學知識與概念了解的深入度，成熟度表示一個學生對數學知識、概念與技巧掌握的程度。一個很簡單檢視學生成熟度的方法是了解他能夠做多少步驟的推理分析。這就好像一個人下圍棋或象棋時，可預先考慮多少步。就筆者觀察到的經驗來說，一般小學高年級的學生應有能力做需要四、五步計算或推理的問題，能處理十步以上問題的學生就非常優秀了。

到了國小高年級或國中以上時，數學課程所需的語文能力，除了閱讀能力外，寫作的表達能力、邏輯推理與敘述能力所扮演的角色也越來越顯得重要。這是因為數學問題的深度已較為提高，回答問題時敘述的複雜度也較高。因此我們願意再一次提醒大家，多注意小朋友聽、說、讀、寫的語文能力。

第五關：分數與比例

當我們學會整數與小數的四則運算以後，接

下來要面對的是既自然又活潑的分數了。我們從小都有和他人分享東西的經驗。例如，家人過生日時，我們可能將蛋糕切成八等份，每一等份是原來的八分之一（記作 $\frac{1}{8}$ ）；或是三兄弟平分一個蘋果，每人分得三分之一（ $\frac{1}{3}$ ）。雖然，在日常生活中分數的出現是相當自然的，然而分數對很多小朋友來說卻是很難掌握的。因此，很多國小學生數學成績滑落就是從分數這個單元開始的。對一個國小學生來說，學習分數為什麼會有困難呢？就筆者的觀察，下面三件事是應該特別注意的。首先，分數不像小數一樣那麼容易感覺大小。譬如， $\frac{75}{88}$ 和 $\frac{84}{97}$ 哪一個數較大？又如 $\frac{75}{88}$ 和 0.852273 哪一個數較大？但是，大家一看就知道 0.852273 比 0.852272 大？這說明了分數雖然也是數字，但是卻是帶有很強的概念性與抽象性。不然，你試著拿一張寫著 $\frac{1}{3}$ 萬的支票去銀行兌現，看看行員會如何處理？因此，對很多小朋友來說，分數實在是令人感覺既真實又有點虛幻。其實在學習數學的過程中，這種既真實又有點虛幻的感覺將一而再、再而三地出現。例如，未來將要面對的負數、無理數、複數等等數字也將是如此，甚至更難理解。小朋友在心態上能越早適應就越能接受它，進而熟悉、掌握它。多加強練習永遠是最好的學習方法。

其次，雖說分數的四則運算也是像小數一樣只是用到整數的四則運算，但是概念上較為繁

複。大家都知道，現在大學院校林立，人人可上大學，造成學生程度大幅降低，有些大學生甚至連分數的四則運算都不熟悉，像 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{3}$ 算成 $\frac{1}{5}$ 的事並不是冷笑話。筆者確實曾聽到在其他大學院校服務的同仁感慨地描述過類似的情況。分數的加減運算必須用到「通分」的概念，而這就必須求兩個數或一些數的公倍數了。相對於分數的加減運算來說，分數的乘除運算就顯得簡單多了。這是因為分數本身的表示法即是一個比值。可是在概念上，分數的除法對很多小朋友來說是相當難理解的。譬如， $\frac{126}{7} \div \frac{5}{8}$ 可以看成將 $\frac{126}{7}$ 分成 $\frac{5}{8}$ 等份嗎？這又要如何說明怎樣分成 $\frac{5}{8}$ 等份，注意 $\frac{5}{8}$ 並不是整數呀。其實，對很多小朋友來說，將 $\frac{126}{7} \div \frac{5}{8}$ 看成是 $\frac{126}{7}$ 與 $\frac{5}{8}$ 的比值或倍數可能是較能理解的。

再來，分數的表示方法並不唯一。例如， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ 與 $\frac{3}{6}$ 等等，都是等值的，它們都等於 0.5。同一個分數有很多（事實上是無窮多種）表示方式，這對一些小朋友來說是很頭痛而有點難以掌握的。也因為同一個數有無窮多種表示法，最簡分數的概念就必須加以探討；而這又會用到分子與分母的最大公因數的求法（如「輾轉相除法」）及「約分」了。

學習分數這個單元應注意幾個面向：第一、應讓學生充分了解上述所談的概念與困難所在之處。據筆者個人的經驗，學習一個數學新單元時，先了解該單元的概念與困難之處將有助於該單元的學習。第二、加強兩個或多個分數的四則運算、比較大小及求最簡分數等的練習。第三、加強應用問題的處理，譬如相似三角形邊長比例的計算等等，以便熟悉分數的意義。不同小朋友學習分數的差異性可能非常的大，因此「因材施教」對學習分數這個單元來說是非常重要的。抽

象理解力高的小朋友可能一教就會，抽象理解力低的小朋友可能需要花很長的時間練習才能有點掌握。學習分數的經驗將有助於往後學習無理數、虛數及複數。所以，學習分數經驗的好壞將影響其未來學習數學的興趣。也因此學習分數這個單元，老師及家長都應注意小朋友的學習狀況；否則等小朋友跟不上而喪失對數學的學習信心及興趣之後，要再挽回就事倍功半了。

第六關：未知數的初體驗

一般來說，數學問題可分為直接和逆向兩類，而處理數學問題的方法也可分為直接與間接兩種。就拿大家熟悉的「雞兔同籠」問題來說：一個籠子內養有四隻雞和六隻兔子，試問雞兔總頭數及總腳數？我們可以直接算出雞兔總頭數共十個且總腳數共三十二隻。但反過來問：「若干隻雞兔同住一個籠子中，已知雞與兔總共十隻，總腳數共三十二隻，試問雞兔各幾隻？」這是個逆向的問題。我們可以這樣子來思考：若籠子內十隻全是雞，則只有二十隻腳。將一隻雞換成一隻兔子，則總腳數會增加兩隻。總腳數三十二隻比二十隻多十二隻，十二除以二得六，也就是說需要將六隻雞換成兔子。因此，籠子內共有四隻雞和六隻兔子。這樣子的處理方式是間接的，但有一點點巧妙。當物品種類增多，問題的難度就大大地增加。舉個例子來說，一個籠子內有雞、兔子、蜘蛛及蛇。若已知總頭數二十六個、總腳數七十六隻，蜘蛛總腳數是雞兔腳數和再加上蛇頭數，且雞蛇總頭數等於兔子與蜘蛛的頭數和；試問雞、兔子、蜘蛛及蛇各幾隻？你不妨用與上面類似的方法解解看。

在中國古代數學名著《九章算術》中，大家可以找到很多實用的問題和巧妙的解法。例如，在書中「方程」一章中有一題：今有五羊、四犬、三雞、二兔，值錢一千四百九十六；四羊、

二犬、六雞、三兔值錢一千一百七十五；三羊、一犬、七雞、五兔，值錢九百五十八；二羊、三犬、五雞、一兔，值錢八百六十一。問羊、犬、雞、兔價各幾何？答曰：羊價一百七十七，犬價一百二十一，雞價二十三，兔價二十九。其原本解法就請大家參考《九章算術》一書。

但是，如上述及《九章算術》中這類的解法是很難形成一般性的方法，而讓大部份的小朋友能夠學習。因為若問題再複雜一點，則即使是很聰明的小朋友，甚至是成人，也不容易用這樣子的方式來求解。只要自己親自動手試試看，你就會了解到用間接的方法去處理逆向的問題看似聰明巧妙，但只要複雜度稍為增高，問題就會變得難以入手了。即使有某個天才想出了絕妙解法（如《九章算術》中的一些例子），也往往很難令一般人理解並模仿使用，而只能讚美與佩服。

那麼，面對這類的問題又該如何處理，而讓一般人容易學習呢？要解決這類問題的有效方法就是引進未知數的概念來處理。就拿前面所舉的「雞兔同籠」問題來說，我們可假設雞有 X 隻，而兔子有 Y 隻。再「直接」根據題意列出方程組：

$$\begin{aligned}X + Y &= 10, \\2X + 4Y &= 32.\end{aligned}$$

最後再解方程組。從這例子中，大家不難發現引進未知數 X, Y 的最大好處在於我們此可用「直接」的方法來列出方程組（即 X, Y 的可能關係式）；而不用去思考一些巧妙的「間接」解法。引進未知數來處理問題的步驟有三：第一、設定適當的未知數；第二、根據題意列出方程組，亦即找出未知數的可能關係式；第三、解方程組。所謂「天下沒有白吃的午餐」，原來不用未知數時，必須根據每個問題找出適當而巧妙的解法。改用未知數處理問題時，困難處在於如何根據不同的問題設定適當的未知數、如何有效地找出未

知數之間足夠的關係式以及如何快速地解方程組。而這些都是可以藉由反覆練習而逐漸熟練與體會的。

依筆者的觀察，一個學生未來數學程度的好壞，可從他如何使用未知數這個工具看出來。其實很多數學好的國中、國小學生就是從使用未知數這個單元開始而拉大與其他同學的數學成績。如果數學中也有「獨孤九劍」的話，那麼我個人也會把「使用未知數」列為第一招。因為它不只可用於代數問題，甚至各種幾何問題也必須使用。學會有效地使用未知數來處理問題，將使自己的數學能力大幅提升，而進到另一個數學層次。當然每個人使用未知數的能力差異性很大，要提升使用未知數能力必須多加練習、模仿。很多人學了未知數而不會用，或只會用在一些簡單的問題上，這實在是「牛刀小試」而令人覺得十分可惜呀。

第七關：簡單圖表

數字計算與圖形分析可說是數學的核心課題，他們往往是一體的兩面而相互關連。當我們具有整數、小數與分數的基本計算能力後，就可以進一步來了解常見的幾何圖形了。當我們還小時，長輩用尺為我們量身高；我們就有了初步的長度或高度的數值概念了。在我們日常生活中到處充滿著幾何型體。除了人造的物品外，大部份的物品可說都是不規則形的。因此，人類花了很長的時間才體會並抽象出一些重要的基本圖形。這些即是我們從小學習的點、線、面、三角形、四邊形、多邊形、圓、立方體、錐體與柱體等等。

由這些簡單的幾何圖形出發，我們可以衍生出很多有用的觀念，如平行、垂直、相交、相切、角度、弧長、長度、面積與體積等等。另外，像維度、相似圖形、全等圖形及圖形的對

稱、投影、鏡射、平移和旋轉等也是重要的概念。請注意，我並不是談這些概念（如平移和旋轉等）所對應的代數計算，因為那是高中以上數學課程要探討的課題。我所要強調的是幾何圖形本身的面向。在此我樂意再一次呼籲：在數學和科學的學習過程中，概念與技術面的學習是相輔相成的，在台灣數學教育中似有重技術而輕概念的現象。數學技術可以慢慢學，但長大後要有數學創意必須從小強調有用的觀念，學習最重要的核心概念及處理問題的方法與模式，這樣才有可能站上巨人的肩上。否則，整天要求學生做一大堆人造問題是不可能培養出好的數學或科學人才的。

近來的認知心理學家已經證實人類對圖像的理解力是遠勝於文字敘述的。相信大家都有這樣的經驗，面對一堆雜亂的資料，往往不容易看出或了解這些資料能提供我們有用的訊息，因此根據我們的目標，將原始資料整理後才能將其所蘊含的意義顯示出來。資料整理的基本方式有二：一是將其歸納分組並製成表格，這可使資料組織化、簡單化。另一是將原始資料歸納分組並畫成統計圖，這可利用圖形來顯現出資料分布或變動的情況。常見的統計圖有長條圖、直方圖、折線圖及圓面積圖。統計圖表是將大量資料轉換成幾何圖形，並利用我們較強的圖像的理解力來分析這些資料意義的方法。學會製作或判讀各種統計圖表是現代人必備的能力之一，這也是從數學這門課中可以學到對個人日常生活或工作上最有用的技能之一。希望未來的數學課程能加強及加重統計的份量，並強調實作的訓練，以培養現代的國民。

第八關：培養誠實、務實、確實的學習態度

西諺說：「誠實是最好的策略」，學習數學

的態度也必須是誠實的。誠實的面對自己對所學的單元是否了解，了解這個單元在學什麼？為什麼要學這些？有哪些概念、方法與結果？不用這些方法，是否有其他替代方法？哪種較有效？這些問題都是必須誠實、認真面對的。在學習一個新單元時，應根據自己的能力及可用的時間務實地擬定學習進度並持之以恆，學習有用的一般性方法，而不要好高騖遠。在練習的過程中，必須將這些概念、方法與結果確實學起來，不要似懂非懂、胡亂使用。數學要學得好，正確的態度是非常重要的。其實，不只是學數學，培養誠實、務實、確實的態度對未來做人做事都是很有幫助的。若能從學習數學的過程中，養成誠實、務實、確實的敬業態度，又何嘗不是學習數學的一大收穫呢？

結語

在這一篇短文中，我們提出了四個關卡，和上一篇短文所列的四個關卡一樣，它們都是學習數學的基本功夫。這些基本功學得好，對未來學習更深入的單元是非常重要且必備的。在「學數學的好處」一文中，筆者曾比照全民英檢，將數學能力分成初級、中級及高級三級。學會了這兩篇短文所探討的八個關卡，就已經具有初級的數學能力，而初級的數學能力就已經足夠滿足很多職業（如行政支援人員及勞工服務人員）的數學能力基本要求。在下篇文章中，我們接下來將討論方程式與多項式、形與數－坐標系和三角形、平行線與圓等等關卡。希望同學們在討論這些新關卡前，能確認確實了解本文及前文所談的各個關卡，那麼才能從容地思考新的單元。 ■

附記：非常感謝嘉義市北興國中吳冠逸同學對本文所提出的寶貴意見。本文初稿剛好完成於今年的父親節，僅以此文追思家父吳敏哲先生。



第二講：

與奇人相遇的故事

◎許志農／國立台灣師範大學數學系



數學經文

與奇人相遇的故事發生在它發生的時候：你無法安排它，你無法使它發生。它是經由你的時時注意，耐心等待下，在一個不可預料的時、地忽然發生的；它不可能是在透過刻意培養或者經由頭腦強烈期待下誕生。

與奇人相遇會讓你有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到那問題的最後一塊拼圖；與奇人相遇也會讓你看到現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。

奇人就是隨身帶著火把，如影隨形，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。

葛吉夫為了追尋一套他們堅信過去存在、但如今所有的線索都渺無蹤影的知識，他與友人一起探索了中東及中亞一帶諸國。他將所遇見的奇人、奇事寫成一本回憶錄《與奇人相遇》。這是他對人生中遇到的那些奇人充滿敬意的回憶。為了緬懷一代催眠大師、靈性導師，就借用葛吉夫的書名《與奇人相遇》來作為這一講的標題“與奇人相遇的故事”。

問題 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

為了避開車潮與人潮，今年（民國九十四年）提早回南部家裡過年，隨手將《與奇人相遇》的電子書載入我的 PDA 裡，打算趁著這趟返家之旅，好好拜讀一番。在高速公路上一路想著，葛吉夫書裡談到的八位奇人，肯定個個來頭不小，來個飛簷走壁，凌空取物，隔空治病，露一手什麼神通、分身之類的，應該不算什麼稀奇。即使沒這麼神，也該個個具有低眉菩薩那種善心，或人人面帶睜眼金剛的威風。於是迫不及待的點著電子書閱讀，第一位奇人就是葛吉夫的爸爸“一位中亞細亞一帶頗有名氣的吟遊詩人”，讀完這一章好像沒有想像中那麼神奇，於是乎在車上睡著了。回家後，繼續閱讀第二位，

第三位奇人，…，還是沒有讀到具有特殊超能力的人。經過兩天的辛苦閱讀，已經讀到第八位，也是最後一位奇人了，這位奇人叫皮歐特·卡本科，是一位採礦工程師，心裡想著，難道最後這位會有驚人的通天本領嗎？讀完之後，發現也沒有，讓我大失所望。書已讀完了，夜深人靜的晚上，只好練習著瑜珈消磨時間，當然也深思著《與奇人相遇》是一本探索內在旅程的書嗎？怎樣的人才配叫奇人呢？

《與奇人相遇》是葛吉夫寫的第二本書，他的第一本書叫《魔鬼說給孫子的故事》。這本書的目的只有一個，就是

無情地摧毀許多世紀以來
深植人心的信仰和觀念。

如果我事先有讀葛吉夫的第一本書，我想我對奇人的定義也許會跟前面所期待的截然不同。

閒話講多了，回到這章的主題吧！“與奇人相遇的故事”是在描述或追憶過去十年來，在我的教學或演講現場，與我有過深深互動的幾位老師或同學。由於當時他對討論問題的瞥見，讓我得到了那個問題的最後一塊拼圖或者讓我看到一位現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。我把這與他交流的時刻稱做“與奇人相遇”，因為在這個特殊的問題與特殊的時間點上，他的確像是一位奇人，他有很出神入化的看法跟解讀。為了不讓這些瞥見消失，每次我都會在事後細心的回顧與整理當時的數學資料，讓我對這個數學問題的瞭解更上層樓。所以這些

“奇人”是讓我數學進入另一個高度的最後一塊拼圖，他們就是師父中的師父。每當我在中學演講，講到那個數學問題，我都會想到他們那不可思議的瞥見，也會儘所有可能，將他們的瞥見傳遞給在場聆聽的每個人。

我之所以稱他們為奇人，就是因為在那些問題上，他們的表現與凡人大相逕庭。奇人不僅將問題看得透澈，引領問題的真理到科學的頭腦，甚至將問題的奧妙連結到我們的內心，讓人們深受感動。數學家僅能將數學真理引導到人的腦，但師父卻可以將數學奧妙深入到人心，所以奇人就是師父。所謂凡人就是當他處在一間黑暗的房間時，他只能借助摸索跟推理去尋找燈的開關位置；而奇人就是隨身帶著火把，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。凡人總是喜歡隨身攜帶一長串的鑰匙，逐一嘗試哪把才能打開門鎖；而奇人就是隨身帶把萬能鑰匙而已，每個門鎖都難不倒他。

現在就讓我們一起來享受我與奇人相遇的往事，將奇人的想法透過我的筆描述出來。也為了感謝葛吉夫的書對我的影響與啟發，前三節就用他所寫的三本書的書名作為標題。

1 魔鬼說給孫子的故事

台大附近，汀州路旁，新店溪邊的師大分部是我大學讀書成長的地方，也是我從事教學、學術研究的地點。三月的暖陽從蟾蜍山上斜照全校園，來自全國的十來位數學資優學生，在數學館三樓的 M310 教室一起探索數學的奧秘，他們無暇欣賞這美景。吸收教授的數學課程，考好試，當選只有六個名額的國手才是他們此行的目的。

《算術講義》是我所教授的一系列課程之統稱。在這課程裡，不僅教授代數、數論，也涵蓋一點組合、幾何與不等式。剩下十來人的課程安排，通常上課兩個小時，做練習一個小時。記得有一次，我給的練習是取自蘇聯的一道立體幾何問題，它是一道幾何不等式問題，看起來是道難題。

學生絞盡腦汁的想這個問題，我以愉快的心情巡視並欣賞他們的解題過程。通常能擠進這一關的女生僅有一兩位而已。奇蹟就發生在一位來自北一女同學身上。在巡視的過程中，忽然在這位奇女子的考卷上看到「想要解決這道幾何問題，需先證明一個引理，利用這個引理就可以馬上解決這道問題。接下來敘述並證明這個引理」這樣的字眼。在做比較困難的數學問題時，“先證明一個有用的引理，再利用它證明問題本身”是常被使用的手法，對我來說，這不是意外之所在。讓我好奇的是「她對那個引理的證明」，簡直妙不可言。現在就讓我們來欣賞，這奇女子提出來的引理及對這引理的美妙證明。

事實上，這位奇女子所提的引理就是本章第一頁的題目。至於它的證明，奇女子是這樣分析的：

奇女子對引理的瞥見

證明式子 $pq+qr+rp-2pqr-1$ 小於 0 即可。現在把該式的 p, q 視為固定的實數，把 r 當成變數，將式子整理成 $(p+q-2pq)r + pq - 1$ ，並令直線方程式為

$$y = f(x) = (p + q - 2pq)x + pq - 1.$$

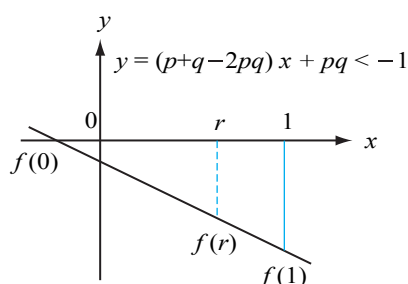
將 $x = 0, 1$ 分別代入，得

$$f(0) = pq - 1 < 0;$$

$$f(1) = p + q - pq - 1$$

$$= -(p-1)(q-1) < 0.$$

此直線的略圖為



因為直線在 $[0, 1]$ 區間的值恆為負數，所以

$$f(r) = (p + q - 2pq)r + pq - 1 < 0,$$

即

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1,$$

得證。 □

為了讓敘述簡潔，溝通方便，或者為了引進一個較深入，不熟悉的概念，給個「定義」成為數學上克服這兩道難關的不二法門，例如「輾轉相除法」，「質數」就是為了這兩個目的才出現的名詞。但是，有時候太熟悉的名詞，反而忘了它的定義或從來沒給過定義，例如：叫你對「人」或「時間」給個定義，你可能會不知所措，不知如何是好，或者回想不起來何時學過他們的定義。這完全是因為頭腦只對困難的東西感興趣，對平凡容易或理所當然的事物漠不關心所導致的結果。我想了好久，勉強想出三個「人」的定義，願意在這裡跟讀者分享：

- (1) 從負面來思考，將「人」定義為「一種增胖容易，減肥難的動物」。不知道你對這樣的定義滿意嗎？
- (2) 從自以為是的面向來思考，將「人」定義為「一種會作夢的動物」。你想過其它動物會作夢嗎？動物作夢的模樣又是怎樣的呢？
- (3) 從正面來思考，將「人」定義為「一種具有幽默感的動物」。你看過其它動植物具有幽默感過嗎？如果沒有，那幽默感肯定是人的一種天性，一種特色。人們輕易的擁有它，就應該時常使用它，不是嗎？

不知道讀者對上述三種定義滿意嗎？最好是自己也給一個不同的定義，領悟一下「平凡才是不平凡！」這句話的意思。這裡所要傳遞的訊息無非是：當你對平凡的事物無動於衷，無法給定義時，相信你對困難的事物也必定束手無策，不知如何是好才是。所以培養頭腦對平凡與不凡的

概念或事物都有興趣，才是正確之道。

奇女子對這道不等式的驚人定義

$$y=f(x)=(p+q-2pq)x+pq-1,$$

引領我們進入這道不等式的殿堂。對於這樣具有睿智的奇女子，相信她對平凡無奇的「人」這個字的定義，肯定比我的定義還不凡。真想聆聽她對「人」的定義。

2 與奇人相遇

到深坑老街吃豆腐，促進地方經濟繁榮，是每位台北人一生必做的功德之一。不過再深入一點，造訪繁華落盡的石碇東、西老街，可能就興趣缺缺了。我對石碇的第一印象是從電視台主播廖筱君的介紹性節目「石碇東街吊腳樓」得來的，印象中，她介紹在石碇東、西老街上捕捉美景的一些畫家。第一次造訪石碇是為了當地一所完全中學要招考高中數學教師的事宜與對新成立的高一資優班演講而來。校長的宿舍就建在學校內，背後是山坡，好像生活在深山一樣，學校連午餐都是自理兼自助式的。當年還年輕的我，真有一點嚮往。此行的目的就是出一份數學考題，讓學校招考高中部的數學老師。如果要命一道不等式問題，最簡單莫過於拾人牙慧，我也常做這樣的事。我將上一節中，奇女子所發現的不等式引理（即本講的題目）當作此次考試的考題之一。事後閱卷時發現，這則不等式還真難，只有一位應試老師完全做出來，而且他的證法大大的讓我意想不到。這位男老師的證法是這樣的：

男老師的瞥見

將原來不等式重新詮釋如下：

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

幾何模型解釋如下：將

$1 \cdot 1 \cdot 1$ 視為 x, y, z 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積；

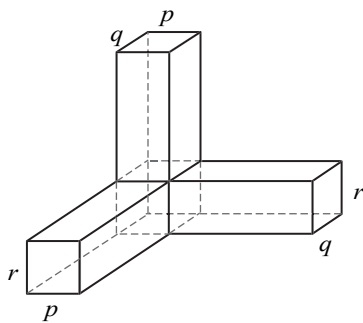
$p \cdot q \cdot 1$ 代表 x, y, z 軸正向上各取 $p, q, 1$ 單位之長方體的體積；

$1 \cdot q \cdot r$ 代表 x, y, z 軸正向上各取 $1, q, r$ 單位之長方體的體積；

$p \cdot 1 \cdot r$ 代表 x, y, z 軸正向上各取 $p, 1, r$ 單位之長方體的體積；

$p \cdot q \cdot r$ 代表 x, y, z 軸正向上各取 p, q, r 單位之長方體的體積。

那麼 $p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r$ 就代表如下圖所示的立體形狀之體積



因為這立體形狀在正立方體內，所以

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

□

利用幾何模型來解不等式問題，是相當高竿的思維。顯然在考試當下，除了必須對不等式所傳達的意思瞭若指掌外，還需瞬間連結到相應的幾何模型，這堪稱為無字證明的一個典範。為什麼我知道這位奇人是個男老師呢？這可是另一個故事的開始！之後沒多久，在一次的演講裡，一位高中老師跑來問我「有一道題目，他這樣解，不知道可不可以？」就這樣我才認識這位奇人。

本章的題目在師大數學系的推甄也考過，下一練習就是當時一位學生的另一種證法，我把他的證法切割成兩個小題，方便讀者思考：

練習 1 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。

(1)證明

$$1 - r - pq + pqr > 0.$$

(2)利用(1)證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

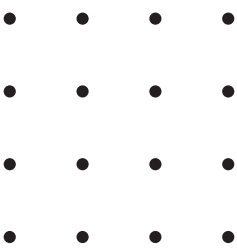
如果你會做這個練習，你將體會到那位考生，將這不等式分割得多麼恰到好處。

3 真實人生僅在當刻

透過遊戲的互動，傳達數學的概念，是我一直想做的事情。但是，恰當的數學遊戲不多見，不是坊間已有解答，就是無法精準的傳遞數學概念，或者遊戲本身不具有任何數學規律或意義。感謝以下這位奇人的幫忙，讓我對一道有興趣的遊戲有更上一層樓的理解，或者說找到那道遊戲的最後一塊拼圖也可以。

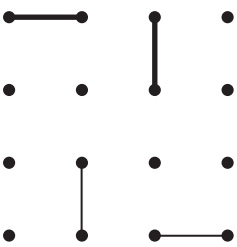
星期三下午，陰霾的天氣籠罩著台北城，即使天氣不好，也沒辦法澆熄建中學生對數學真理追求的熱情。每次到建中演講，我都喜歡採取不一樣的演講策略，或者說是一種試驗或試探的策略，在一般學校的演講，我不敢也不能採用這種模式。在“口”字形的演講場地，最適合讓學生玩數學遊戲，因為學生的互動容易，討論方便。建中的數理資優教室就是排成“口”字形。記得那次演講給了幾道數學遊戲，其中有一道叫「蓋房子」的遊戲：

下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。占有最多房子的人勝。



因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人占有比較多的房子（總共有 9 間房子），也就是說不會平手。學生兩人一組玩這道遊戲，不需花多少時間就可以大戰好幾回合。重點是如何識破這道遊戲的數學意義呢？如果沒有那種想要識破它的衝動跟企圖心，你就像多數人一樣，毫無目的的玩這道遊戲。說實話，我在給這道遊戲時，我只知道後玩者常常會贏，至於贏的策略是什麼？我仍在摸索中。所以給他們玩這道遊戲，可以說是一種試探，看看可不可以找到破題的人。

在學生的喧嘩聲中，傳來很刺耳的兩個字。當下，我有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到這遊戲的最後一塊拼圖。當然，講出這兩個字的同學，稱他為現代阿基米得也不為過，他的神情就像光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」一樣。究竟那兩個字有這麼大的魔力，可以破題呢？讓我們用下圖來告訴你那兩個字是什麼（細黑線是先玩者，粗黑線為後玩者）：



練習 2 真希望你能拈花微笑的說出那兩個字。

數學家彼得·鄔斯賓斯基，葛吉夫的重要門徒，以驚人的記憶力，完整記錄了當時葛吉夫的授課內容，並將它寫成《探索奇蹟》這本書。這是我喜愛的一本精神食糧，就以這書名當下一節的標題：

4 探索奇蹟

每年冬天，來趟花蓮之旅，幾乎成為例行公事。住英雄館，或宿美人館，便宜又方便，而且散步就可以到達液香扁食店，吃碗扁食是那晚必做的晚課。白天散步在花蓮港邊的腳踏車步道，想著悠游在海裡的翻車魚，生長在山邊的芋頭，真讓人食指大動。回家時可別忘了帶點曾記麻糬或百年老店惠比須的花蓮薯。有位邱姓大學同學住花蓮真好，每次都帶給我不同的體驗。記得有一次，晚上開車帶我到花蓮的山上品茶看花蓮夜景，讓我留下很深刻的印象；更有一次，帶我到遠來大飯店眺望整個花蓮地區燈火通明的景色。當然，到光復糖廠吃冰或安通洗溫泉也是不可避免的啦。

每次到花蓮出差，心情特別愉快，除了當作散心外，參與數學競賽的宜、花、東考生也不是很多，無論是口試或閱卷都輕鬆。記得有一次，一道題目是這樣出的：

設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 及 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 。試證明：不等式 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 成立。

基本上，這並不是一道難題，學生作法五花八門都有，不過都離不開把 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 想成數線上的五個點，或者把 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 看成兩個矩形的面積關係，這兩種容易聯想到的出發點。閱卷時發現一位同學利用分數的想法來處理，讓我有點意外。或許是學數論的我對“數”特別敏感，在口試時，問得更詳細一點，就得知這位男

同學的整個想法，現在把他的奇想寫下，供讀者參考：

男同學的瞥見

將 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2 > 0$ 想成分數大小關係，得

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{b_2}{a_2}.$$

將兩邊同時減 1，得

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} - 1 &\geq \frac{b_2}{a_2} - 1 \Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \geq \frac{b_2 - a_2}{a_2} \\ &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2}. \end{aligned}$$

利用 $b_1 \geq a_2 > 0$ (即 $\frac{b_1}{a_2} \geq 1$)，得

$$\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq 1.$$

由 $a_1 - b_1 \geq 0, b_2 - a_2 \geq 0$ 得

$$a_1 - b_1 \geq b_2 - a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2,$$

得證。 □

練習 3 如果要求利用矩形面積的想法來證明這不等式，你有辦法完成嗎？

5 來自巨人的投射

「站在巨人的肩上，可以看得更遠；來自巨人的投射，可以照得更亮」是學數學的人渴望有的際遇，想要獲得的加持；但是，巨人的肩膀容易攀爬嗎？巨人的“數光”會普照在每個人身上嗎？這裏要講的這道題目，其背後隱藏著一段與巨人有關的歷史；但是這題目本身卻只是巨人投射之下的一個簡單產物。雖然是個簡單的特例，但想要巧妙解決它，也必須是個奇人才辦得到。就讓我們開始吧！

那是一個寒冷的午後，辦公室的電暖氣帶來一絲暖意，幫我工作的助理正打著電腦。幫我工作的助理有兩類，用嚴肅一點的話說，就是「有給職助理」與「無給職助理」兩種，有給職助理是數學系的大學生居多。這幾年經濟不是很好，

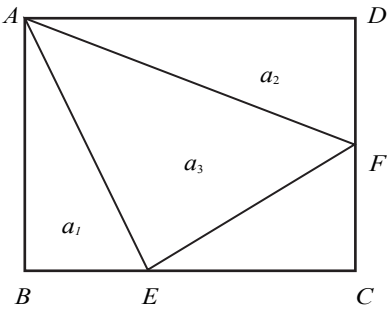
清寒的優秀學生，可以當我的有給職助理，除了寒暑假幫我寫解答，校對數學資料，試讀一些文章外，最重要的要求，也是唯一條件，就是學期成績至少要達到八十五分以上（告訴你們一個秘密，其實她們常常都超過九十分，比我大學成績都還好）。至於無給職助理就是願意幫我，做牛做馬般，讀校第一手資料的老師了，順便對我的文章給些建議及看法，很感謝她們的付出。

手邊正在處理這期問題集的投稿，像過去一樣，快速的翻閱著老師或學生們的解答。說時遲，那時快，手與腦筋同時定格在一則吸引我的解答上，這在過去是從未發生過的事，原來這是個妙解，肯定出自奇人之手。心中雖然高興，為了順便檢定一下助理的功力，嘴裡說著「這幾個解答回去讀一下，把好的解答打下來」。這是我常用的一種測試，助理們大多不會讓我失望。幾天後，助理告訴我「那個解答特別妙，值得推薦，但是想不通那位老師如何想到這樣的解法」。就在幾天前，一個更寒冷的午後，在拜訪淡江鄭惟厚教授的路上，問題集企劃提起那個我建議刊登的解答，我半開玩笑的建議，應該在該解答的右上角加上一個“獎”字。

說到這妙解的題目那就更妙了，約莫半年前，彰師大科教中心主辦一場「中區數學新知研討會」，邀請我給個演講，希望談一些可以給中學教師拿去當科展教材，又具有數學深度的題目。這讓我想起很久以前，在一本書裡看到，談論有關高斯五邊形面積公式的問題。印象中，它好像是說：「給定任意五邊形，相鄰三個頂點所形成的三角形稱為基本三角形，一共有五個基本三角形。高斯證明：五邊形的面積可以用這五個基本三角形的面積來表示。」至於如何表示，書裡並沒有細講了。經過我搜尋國外數學網站的結果，好不容易找到一篇談論“高斯五邊形面積公式”的文章。事實上，這五邊形的面積恰好是某

個以基本三角形面積為係數的二次方程式之一根。有了這些資料，我就開始寫演講的講義。又有一個問題產生了，我不想一開始就導進高斯這個複雜的公式，想要先引一個簡單的例子，但相應的例子哪裡找呢？還好，在大陸《中學生數學雜誌》與北一女的數學競賽題目裡，我發現了一點跡象。站在巨人高斯的肩上（將面積與一元二次方程式扯上關係），我把這跡象投射到四邊形上，得到如下的例子：

如下圖所示： $ABCD$ 是面積為 S 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

這就是數學問題集裡的題目敘述，同時也是那場演講的開胃菜。曲終人未散，戲棚下站久就是你的，為了回饋你的耐心跟毅力，我們就把奇人的智慧馬上揭曉吧！

投稿者的瞥見

將四條線段 CD, CB, CE, CF 配對相乘，得到等式 $(CD \times CB) \cdot (CE \times CF) = (CD \times CE) \cdot (CB \times CF)$ 。將它們轉換成面積，得

$$S \cdot (2(S - a_1 - a_2 - a_3)) = (S - 2a_1) \cdot (S - 2a_2).$$

整理得到

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$



放個馬後炮，整個問題的關鍵點就是 E, F 兩個點，所以考慮從 C 點畫出的四條線段 CD, CB, CE, CF 的不同配對乘積是合情合理的想法。

練習 4 將二次方程式的兩個根求出，並確認何者才是面積 S 的值。

練習 5 當你具有投影面積的素質或向量內積的知識時，應該想想看！將矩形改成平行四邊形，這個恆等式是否依然成立。投稿者的解釋仍然適用嗎？

6 “ $9-3=+6$ ” ！

這裡要分享的奇人是我的一位親戚，“ $9-3=+6$ ”是她刻骨銘心，一輩子也忘不了的算術題目。三叔是個忠厚老實的人，三嬸是個傳統鄉村婦女，養兒防老，生男傳宗接代是她們根深蒂固的中心思想。在這個大家不想增產報國的年代，實在很難想像她們為了求得一子，竟然連生九位千金，最後還是沒生出個兒子來。因為家計因素，只好將三個女生送給別人撫養。養育六個孩子也不是件容易的事，記得大學時，接到三嬸大女兒的一封信，大意是說“三嬸不准她補習重考大學，請我跟她媽求情”。人在台北的我，不容易馬上回南部跟三嬸講，就這樣拖過去了。雖然堂妹後來還是念了大學，但是心中總是有一份虧欠。

小時候對三嬸最深刻的印象是，每當生產時，虛弱的三嬸總是急著問在旁邊幫忙的我媽“是男生還是女生？”我媽的回答總是“生了就好”，此時三嬸就大聲哭了起來。有幾次還說出“大嫂，拿棉被把小孩子悶死算了”這樣的氣話，接下來還給哭幾個禮拜才行。現在三嬸的女兒都嫁出去了，孫子滿堂。今年過年時，我媽說三嬸現在很幸福，因為三嬸前一陣子驕傲的跟她

說“現在每天幫孫子洗澡，能洗到孫子的 LP 是我此生最大的幸福！”。我聽了之後哈哈大笑。

如果要學數學的我幫三嬸的人生下個標題，那就是“ $9-3=+6$ ”這道算術方程式。旁觀者可能把它當普通減法來看待，身歷其境的我卻有不同的解釋：數字 9 是三嬸執著的極限； -3 代表她此生所必須背“負”對三個孩子無法彌補的虧欠； $+6$ 則是晚年苦盡甘來的“正”向人生，這也「是」她應得的善果。看似簡單的算術，但對文盲的三嬸來說，這道人生運算方程式，她可是點滴在心頭。但願三嬸已悟得葛吉夫的書名《真實人生僅在當刻》。

這篇文章寫於民國九十四年新年前夕，我要再次的說明，這文章只是要傳達《魔鬼說給孫子的故事》裡的唯一目的，就是

無情地摧毀許多世紀以來
深植人心的信仰和觀念。

這個目的不僅內在旅程適用，數學之旅也合宜，大家可以想想。



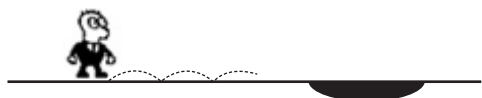
躲不掉的陷阱

◎許介彥／大葉大學電信工程學系

等比數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 中有沒有以 3 開頭的數？這個問題相信您很快就能回答，因為 $2^5 = 32$ 是我們很熟悉的數；如果我再問您同一個數列中是否有以 51 開頭的數，您或許也能很快想到 $2^9 = 512$ 。如果我再問您該數列中是否有以 6218973 開頭的數，您大概就一下子答不上來了。本文將說明：對任意正整數 S ，數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 中一定找得到以 S 開頭的數。

等差數列的情形

某人由數線上某點 a 出發，以穩定的步伐向右行走，每一步的長度都是 d ($d > 0$)。如果我們在此人的前方某處挖一個坑，坑長大於步長，那麼此人免不了將會踏進坑裡去：



假設我們將坑挖在 $(9 \times 10^n, 10 \times 10^n)$ (坑長為 10^n)；為了要讓坑長大於步長， n 須滿足

$$10^n > d,$$

因此只要 $n > \log_{10} d$ (這樣的 n 有無窮多個)，此人必定會踏入坑中；這說明了：等差數列 $a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ 中必有某數其最左邊的位數為 9。

數字 9 並無特殊之處；如果我們將坑挖在 $(123 \times 10^n, 124 \times 10^n)$ ，那麼只要坑是位於此人前方而且 $n > \log_{10} d$ ，此人同樣將踏入坑中，因此等差數列 $a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ 中也一定會有

以 123 開頭的數。

一般而言，對任意實數 a 、正整數 S 與正實數 d ，數列 $a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ 中一定找得到以 S 開頭的數。

平方數的情形

考慮一個類似的問題：對任意正整數 S ，由平方數形成的數列 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 中是否一定找得到以 S 開頭的數？

答案同樣是肯定的；我們以 $S = 7$ 為例來作說明。假設我們將坑挖在 $[7, 8), [70, 80), [700, 800), \dots$ (坑長分別是 1, 10, 100, ...)，我們以下將說明：如果某人在數線上行走的落腳點依序為 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ ，那麼他免不了會踏入某個坑中。

對任意非負整數 n ，如果此人跨得過位於 $[7 \times 10^n, 8 \times 10^n)$ 的坑，那麼必定存在某個整數 k 使得

$$k^2 < 7 \times 10^n \text{ 且 } (k+1)^2 \geq 8 \times 10^n,$$

也就是

$$\frac{8}{7} k^2 < 8 \times 10^n \leq (k+1)^2,$$

單獨看 k 的部分得

$$\frac{8}{7} k^2 < (k+1)^2,$$

由此可解得

$$-0.48... < k < 14.48...$$

這說明了此人只可能在最初 14 步跨過地上的坑，對 14 步外的任何一個坑 (個數有無窮多個) 他完全不具備跨越的能力，所以此人終將踏

入某個坑中。

與前面提到的等差數列每一步的長度為定值的情形比起來，平方數數列中行走的步伐其實越邁越大；由

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

可知步長依序為 3, 5, 7, 9, ...，不過步長增大的速度顯然還趕不上坑長增大的速度（坑長是以指數成長）。

數字 7 同樣並無特殊之處。一般而言，對任意正整數 S ，數列 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 中一定找得到以 S 開頭的數。

Dirichlet's Theorem

在參考資料[1]中，筆者曾經介紹 Dirichlet's theorem：

Dirichlet's theorem

對任意無理數 α 與正整數 K ，必存在整數 m, n 使得

$$|m\alpha - n| < \frac{1}{K}.$$

由於對任意正實數 ε ，不管 ε 有多小，我們都能找到正整數 K 使得 $\frac{1}{K} < \varepsilon$ ，因此對任意無理數 α 與正實數 ε ，由 Dirichlet's theorem 可知一定存在整數 m, n 使得

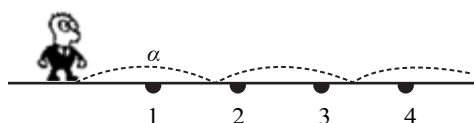
$$|m\alpha - n| < \varepsilon.$$

（滿足上式的 (m, n) 其實有無窮多組）。

因此對任意無理數 α （可為正數或負數），等差數列 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ 中雖然不可能有整數（因為 α 為無理數），不過一定找得到某些「很接近整數的數」。以 $\alpha = \sqrt{2}$ 且 $\varepsilon = 10^{-10}$ 為例，我們知道在數列 $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots$ 中必有某數其與某個整數的距離小於 10^{-10} 。

對數線上的行走而言，上面的性質說明了：如果我們在數線上除了 0 之外的每個整數點的周

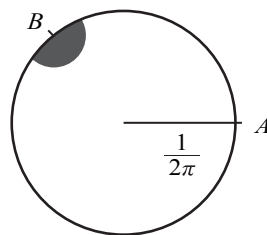
圍挖一個小坑，坑長為 2ε （即以 ε 為半徑），那麼如果有人數線上由原點出發，以固定步長 α 前進，此人終將踏入某個坑中。



Kronecker's Theorem

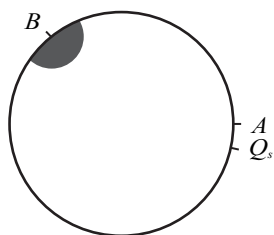
如果我們不是在整數 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 的周圍挖坑，而是在 $c \pm 1, c \pm 2, c \pm 3, \dots$ 等數的周圍挖坑，其中的 c 為任意實數，那麼對一個由原點出發以固定步長 α （任意無理數）前進的人而言，他是否還是一定會踏入某個坑中呢？以下我們說明答案是肯定的。

想像我們將數線以反時鐘方向繞在一個周長為 1（也就是半徑 $\frac{1}{2\pi}$ ）的圓上；如此一來原來數線上任何兩個距離為整數的點在這個圓上都會重合於同一點。假設原來數線上所有的整數點重合於下圖中的 A 點，而 $c \pm 1, c \pm 2, c \pm 3, \dots$ 等數則重合於 B 點：

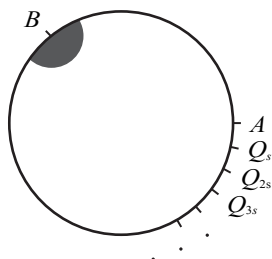


我們相當於要證明：某人由 A 點出發後以固定步長 α 沿著圓周前行，經過若干步後他一定會踏入位於 B 點周圍的坑中。

根據 Dirichlet's theorem，我們知道若將坑挖於 A 點周圍，此人一定會踏入坑中。假設此人由 A 點出發後在圓周上的落腳點依序為 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ ，而且他在走了 s 步之後（落腳點為 Q_s ）來到了一個與 A 點的距離小於 ε 的位置，如下圖：



如果此人由點 Q_s 繼續再走 s 步，落腳點 Q_{2s} 與 Q_s 的距離也將小於 ε ，而且 $|Q_{2s}-Q_s|=|Q_s-A|$ 。依此類推，如果此人繼續再走 s 步，落腳點 Q_{3s} 與 Q_{2s} 的距離也將小於 ε ，如下圖所示：



其中

$$\varepsilon > |Q_s-A| = |Q_{2s}-Q_s| = |Q_{3s}-Q_{2s}| = \dots$$

這就像是我們前面看過的等差數列中坑長大於步長的情形，因此經過若干步後此人一定會踏入位於 B 點周圍的坑中，也就是說，他終將踏入數線上某個位於 $c \pm n$ 周圍的坑中（ n 為某整數）。

以上說明了：對任意無理數 α 、實數 c 與正實數 ε ，必存在整數 m, n 使得

$$|m\alpha - c - n| < \varepsilon.$$

這個定理稱為 Kronecker's theorem，因數學家 Leopold Kronecker（1823-1891）而得名。由於上式也可寫為

$$c - \varepsilon < m\alpha - n < c + \varepsilon,$$

因此我們也可以將這個定理理解為：對任意無理數 α 與實數 c ，必可找到整數 m, n 使得 $m\alpha - n$ 的值與 c 任意接近。

等比數列的情形

現在我們回到本文一開始的問題：證明對任意正整數 S ，數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 中一定找得到以 S

開頭的數。

以數線上的行走而言，我們相當於要證明：如果數線上

$$[S \times 10^n, (S+1) \times 10^n), \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

等位置分別有坑，而且某人在數線上行走的落腳點依序為 $2, 2^2, 2^3, \dots$ ，那麼他終將踏入某個坑中，也就是存在正整數 m, n 滿足

$$S \times 10^n \leq 2^m < (S+1) \times 10^n$$

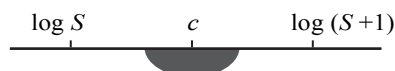
分別取以 10 為底的對數，得

$$n + \log S \leq m \log 2 < n + \log (S+1)$$

也就是

$$\log S \leq m \log 2 - n < \log (S+1)$$

所以我們必須證明在無理數 $\log 2$ 的所有倍數中，有某個倍數與某個整數的距離介於 $\log S$ 與 $\log (S+1)$ 之間，這不難由 Kronecker's theorem 證明，我們只需令 c 為區間 $(\log S, \log (S+1))$ 中的任意一點，例如 $\log S$ 與 $\log (S+1)$ 的中點：



那麼根據 Kronecker's theorem，存在整數 m, n 使得 $m \log 2 - n$ 與 c 的距離任意小，因此存在整數 m, n 使得 $m \log 2 - n$ 的值介於 $\log S$ 與 $\log (S+1)$ 之間，由此說明了數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 中一定找得到以 S 開頭的數。

一般而言，對任意正整數 a ，只要 a 不是 10 的整數次方，那麼對任意正整數 S ，數列 $a, a^2, a^3, \dots$ 中一定找得到以 S 開頭的數。

另一個應用

以下我們將證明：對任意實數 x ，函數 $f(x) = \sin \pi x + \sin \pi \sqrt{2} x$ 的值都不等於 2，不過存在 x 可使 $f(x)$ 的值與 2 任意接近。

我們先說明 $f(x)$ 的值不可能等於 2。由於正

弦函數的最大值為 1，因此 $f(x) = 2$ 只可能發生於 $\sin \pi x = 1$ 且 $\sin \pi \sqrt{2} x = 1$ 時。如果 $\sin \pi x = 1$ ，那麼 $\pi x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n 為整數)，也就是 $x = \frac{1}{2} + 2n$ ，因此 x 為有理數。另一方面，如果 $\sin \pi \sqrt{2} x = 1$ ，那麼 $\pi \sqrt{2} x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ (m 為整數)，也就是

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + 2m \right)$$

因此 x 為無理數。由於 x 不可能同時是有理數與無理數，因此 $f(x)$ 的值不可能等於 2。

接下來我們說明 $f(x)$ 的值可以很接近 2。我們只考慮 $x = \frac{1}{2} + 2m$ 的情形，其中的 m 為整數；我們將說明存在整數 m 可使得

$$\sin \pi \left(\frac{1}{2} + 2m \right) + \sin \pi \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2m \right)$$

的值很接近 2。

由於 $\sin \left(\pi \left(\frac{1}{2} + 2m \right) \right) = 1$ ，因此我們只須說明存在 m 可使得 $\sin \pi \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2m \right)$ 很接近 1，也就是存在 m, n 可使得 $\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2m \right)$ 很接近 $\frac{1}{2} + 2n$ ，即對任意正實數 ε ，不管 ε 有多小，都存在 m, n 可使得

$$\left(\frac{1}{2} + 2n \right) - \varepsilon < \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 2m \right) < \left(\frac{1}{2} + 2n \right) + \varepsilon$$

也就是

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon < 2\sqrt{2}m - 2n < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon$$

即

$$\frac{1-\sqrt{2}}{4} - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt{2}m - n < \frac{1-\sqrt{2}}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

我們由 Kronecker's theorem 知道的確存在整數 m, n 可滿足上式（相當於 $\alpha = \sqrt{2}$ 且 $c = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$ 的情形），因此的確存在 x 可使 $f(x)$ 的值與 2 任意接近。

結語

數學家 Kronecker 對自然數的喜愛甚於其他種類的數，他曾說過一句數學上的名言：“*God created the integers; all else is the work of man.*”

本文雖然說明了對任意正整數 S ，在數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 中一定存在以 S 開頭的數，不過我們的證明過程並沒有提供什麼有效率的方法可以用來找到這些數。有趣的一點是這些數的分布並不規則；單以 S 為個位數的情形來說，數列 $2, 2^2, 2^3, \dots$ 直到第 46 項（即 2^{46} ）才第一次出現以 7 開頭的數，而直到第 53 項才第一次出現以 9 開頭的數。相較起來，出現以其他阿拉伯數字為首的數所需的次方都要小得多。

就像孫悟空逃不出如來佛的手掌心一樣，Kronecker's theorem 彷彿在數線上佈下了一座「疏而不漏」的網，每個無理數若想掙脫都將陷入網中，一個也跑不掉。

練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1. 試證： $\log_{10} 2$ 是無理數。
2. 對任意正整數 S ，由立方數形成的數列 $1^3, 2^3, 3^3, \dots$ 中是否一定找得到以 S 開頭的數？
3. 試證：Kronecker's theorem 中，如果 α 是有理數而不是無理數，定理將不成立。
4. 試證：存在整數 n 使得 $|\sin n| < 0.0001$ 。
5. 試證：對任意不等於 1 的正整數 a ，純小數 $0.(a^1)(a^2)(a^3)\dots$ 必為無理數；其中的 (a^n) 為 a^n 在十進制中的表示方式。以 $a = 2$ 為例，所對應的純小數為 0.248163264128...

參考資料

- [1] 許介彥 (2004)，淺談連分數，科學教育月刊，第 267 期，P35-46。
- [2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford, 1979.



分解之美

級數求和是一件不容易的事情，但是透過分解的方法，可以使一些特殊級數的求和變的有趣且簡單。

◎謝銘峰／彰化高中

緣起

在數列與級數的單元，大家都會學到

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

這一個特殊級數的求和方法。這實在是一個很有趣的方法，透過適當的分解，將 $\frac{1}{n(n+1)}$ 寫成 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ，就可以透過「同項消去」的方式將和求出，真是一件十分美妙的事情。

完整的求和式子是：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

但是，分解的故事不應該就此打住，以下，我們以這一個手法，再將故事延續下去。

同樣手法

看到(1)式的方法，同學們會很驚奇，但是卻不一定會學到這一個手法，例如

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}$$

這一個式子，也是採用相同的手法，但多數同學會將它們分解成

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11} - \frac{1}{12 \cdot 13}$$

的樣子（大概想說是對稱吧！），仔細檢查一下，把它們「合成」回去的結果是不對的，也無法產生「同項消去」的作用，不禁讓人有點氣餒。

真正的做法是將 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ 分解成 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ 的樣子，透過相加後分子會變成 $4-1=3$ 的情形，因此，

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right),$$

如此，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12} - \frac{1}{11 \cdot 12 \cdot 13} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{11 \cdot 12 \cdot 13} \right). \end{aligned}$$

利用等差的概念，將 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ 巧妙地分解，就是本類型問題的重心。如果清楚這樣的概念，那 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$ 又該如何求和呢？

這裡需要加上額外的數字來幫忙。將 $1 \cdot 2$ 改寫成 $1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2$ ，這一個突破性的想法並不容易，稍加整理 $1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 = (3-0) \cdot 1 \cdot 2$ ，

因此， $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} (1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2)$ ，於是：

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) \\ &= \frac{1}{3} [(1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + \cdots + \\ & \quad (n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - (n-1) \cdot n \cdot (n+1))] \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)。 \end{aligned}$$

這一個做法很美妙，答案也很可愛，透過巧妙地分解，我們可以求得這樣級數的和。

應用一

但是，單單介紹主角出場，不讓它們表演一下是很可惜的，究竟

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

與

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

這兩個級數有沒有有趣的應用呢？答案是有的。

在數列與級數裡最難求和的是 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ ，因為，

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) \\ &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n)， \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \\ &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}， \end{aligned}$$

$$\text{整理一下， } 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

很多同學必然納悶，如果 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，那為何 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 不等於 $\frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ 呢？

事實上，等於 $\frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ 的是 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$ ，而且級數 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$ 遠比 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 好求多了。

練習 1 那你可以推導出 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 之求和公式嗎？

應用二

$$\text{那 } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

這一個級數也有應用嗎？是的，我們可以用它來估算一個不容易計算的級數。

據說：無窮級數

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}，$$

據說的意思是高中階段無法求得此級數的和，而事實上由應用一，我們已經很清楚類似 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 這樣的級數是很不容易求和的，要計算 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 更是困難。但是，為何要計算 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 的和呢？因為我們想知道，如果有一個無窮級數，每一項都是正的，那麼，這一無窮級數會不會無法求和呢（即所謂的發散）？也就是會不會越加越大，大到不可收拾呢？

答案很明顯，不一定會，因為，古有名言：

「日取一半，取之不竭」，也就是說例如： $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$ ，雖然每一項都是正的，但是，其和卻是有限的 1。於是，我們又有問題了，那如果所加的每一項都會越來越小，小到很小，趨近於 0，這一個無窮級數的和是不是就是有限呢？很奇怪，答案也是不一定，例如： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 一直加下去卻會大的驚人，真的嗎？因為

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

由於 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 是一個發散級數，
因此， $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 也是發散級數，是無法求和的。

因為 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 無法求和，不禁令人想知道 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ 是不是也是發散級數？於是，我們請 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ 來幫忙。因為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \\ & < \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ & = 2 \end{aligned}$$

因此， $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ 是一個收斂的無窮級數。

偉大的數學家尤拉發現 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ 的收斂值是 $\frac{\pi^2}{6}$ ，大約是 1.6449，雖然我們沒有尤拉的高明可以計算出正確值，但是利用分解的手法可以得到一個比 2 更好的估計值。

這次我們找的級數是 $1 + \frac{1}{1.5 \cdot 2.5} + \frac{1}{2.5 \cdot 3.5} + \frac{1}{3.5 \cdot 4.5} + \dots$ ，因為

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \\ & < 1 + \frac{1}{1.5 \cdot 2.5} + \frac{1}{2.5 \cdot 3.5} + \frac{1}{3.5 \cdot 4.5} + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.5} + \dots = 1.666\dots, \end{aligned}$$

透過分解的方式讓我們和尤拉接近一點。

練習 2 想想看，為何

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \\ & < 1 + \frac{1}{1.5 \cdot 2.5} + \frac{1}{2.5 \cdot 3.5} + \dots + \frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)} + \dots? \end{aligned}$$

意外發現

我們已經知道 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 是發散數列，如果將

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

重新排列一下可以變成：

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \\ & = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots \right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \dots \right) \\ & = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{2}} + \dots \\ & = 1 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots \right). \end{aligned}$$

因為 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 發散，就說明 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ 是發散的，如果 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ 是發散的，當然，質數就是無限多個的囉！很意外的得到一個質數是無限多個的證明方法（這一個方法應該是早已知道的結果）。

事實上， $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ 比起 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 來說少很多項，自然也小很多，如果問： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ 是否收斂？是一個不簡單的問題，但是以倍數來看卻是 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 的 $\frac{1}{2}$ ，感覺上「少很多」和「一半」是兩個不一樣的概念，但是因為兩級數都是發散的，對於一樣的級數卻有不一樣的感覺，這在發散的級數來說是常見且很有意思的情形。

當初將級數重排是想看看是否有其他證明 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 收斂的方法，不過卻有意想不到的收穫。

結語

寫這篇文章是我以前即有的想法，從第一年教書即對於有關級數分解的東西感到興趣，斷斷續續的將一些教學的新的心得寫下來，在撰寫的過程中，還多得到一些我原本不清楚的東西，很是興奮！

學習數學的過程不在於學到多少東西，而在於因為思索而發現一些自己意想不到的美妙結果。期盼多給自己一些唸書與思索的時間，在數學探索的路途中有更多的驚奇。

自我練習的解

[1]

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n 3k^2 + \sum_{k=1}^n 2k \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{4} [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ & \quad (n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)] \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \end{aligned}$$

整理可得 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (又 $= (1+2+3+\cdots+n)^2$ ，這是很神奇的結果，有其他有趣的證明方法)。

[2]

我們發現當 $a+b=k$ ，其中 k 是一個定數時，則當 $a=b=\frac{k}{2}$ 時， ab 有最大值，這事實上就是我們熟悉的算幾不等式。

於是 $2n = n + n = (n+0.5) + (n-0.5)$ ，可得

$$n^2 > (n-0.5)(n+0.5),$$

自然其倒數

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)}.$$

當 n 越來越大時， $\frac{1}{n^2}$ 和 $\frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)}$ 會很接近，因此，用 $1 + \frac{1}{1.5 \cdot 2.5} + \frac{1}{2.5 \cdot 3.5} + \cdots + \frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)} + \cdots$ 來估計 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 誤差不大。

有沒有更好的級數（好計算又很準）來估計 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 的值呢？也許值得動動腦喔！



結構化教材設計簡介

◎王素賢／惇敘工商

編者按：

本文為〈運用結構化教學於高職數學科個別化學習之研究〉（見參考文獻[1]）的摘要，論文指導者為蔡秉燁教授（淡江大學教育科技研究所），原始論文曾獲得「台北市第5屆教育專業創新與行動研究」論文組特優。

有一段時間，教材結構化一直停留在概念的層次，隨著資訊科技的進步，蔡秉燁教授終於發展出一套技術，能輕鬆而有效地將教材結構化。正由於教材結構化變得簡單可行，大家才有餘力以結構化的教材為基礎，思考各種應用的可能性，例如，線上評量、補救教學、跨領域的課程統整等等。我們很榮幸能徵得蔡教授與王老師的同意，透過《數學新天地》和大家分享他們的研究內容。

前言

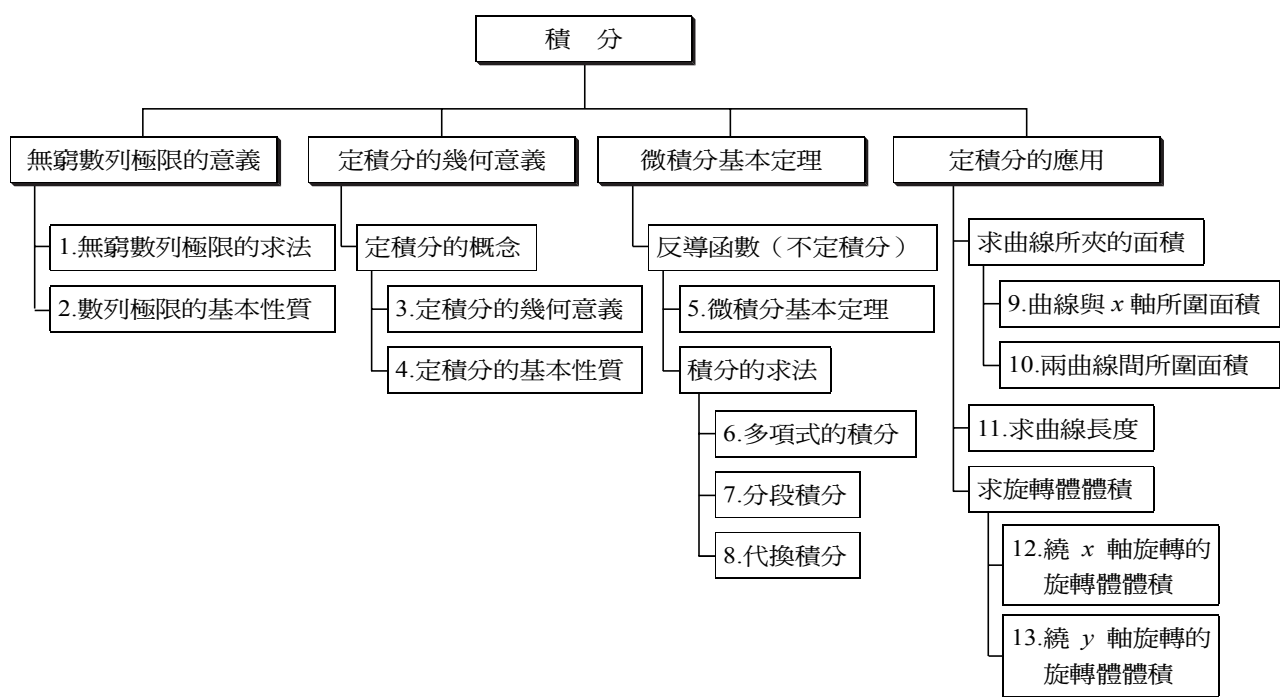
從教學理論的觀點來看學生的學習過程，研究中歸納出學習活動有其次序性存在，即對於較簡單的學習為較複雜學習的先備條件(prerequisite)，學生之所以學不會某種教材，是因為他未具有學會此一教材的基礎能力或先備知識之故。根據 Bruner 學習理論的研究，強調學習「結構」(structure)的重要性，認為教師必須配合學生的認知結構，讓學生自動發現教材所包含的結構性。把握住「結構」之後，因其具有概括性和類化性，可以產生較大的學習遷移，並達到有效學習。

我們現在所使用的數學教科書，通常是依冊、章、節、重要概念、學習的主要目標、次要目標及授課時數等概念層級建構編寫而成，但是這種樹狀結構圖所編排出來的教材，只能提供學生縱向的連結概念，無法橫跨理解節與節之間的相關性，專家可以對知識概念做縱橫交叉式的連結思考，但對於一個初學者的生手，其知識的建構無法像棋盤式錯綜複雜的跳躍式學習。因為一個概念的形成是由一個或一個以上的基礎概念所奠定組合而成的，或者是學習一項概念或技能必須具備一些基礎的能力，由此可知學生的數學學習是具有概念間的相關性和先後次序的結構性。

邁入 21 世紀的人類正面臨資訊科技快速發展、知識爆炸的時代，汲取知識、運用科技，便成了人們學習的重要課題。在這複雜而龐大的知識體系中，運用資訊科技理出知識結構化、系統化的端倪，對於知識學習大有助益。而如何提供一種有效的知識結構，強化學生的數學學習呢？很多學者專家認為開發一份適合學生能力的結構化教材，並配合老師們的教學策略與教學熱忱，有其存在的必要性。現在讓我們一起分享結構化教材設計的方法與步驟：

一、學習目標要素之細分化

結構化教材設計，在於具體列出該學科、領域或主題應具備之完整內容，以階層化的工作分析法輔助列出完整之學習目標。現以「積分與應用」單元為範例實施教材設計。由「積分與應用」單元之現有教材經由教學目標分析、教學目標結構分析、教學內容分析、教學內容結構分析，將教材的所有學習項目之構成要素一一抽出，總共找出 13 項教材要素，並做出學習目標要素分析圖，如圖 1 所示：

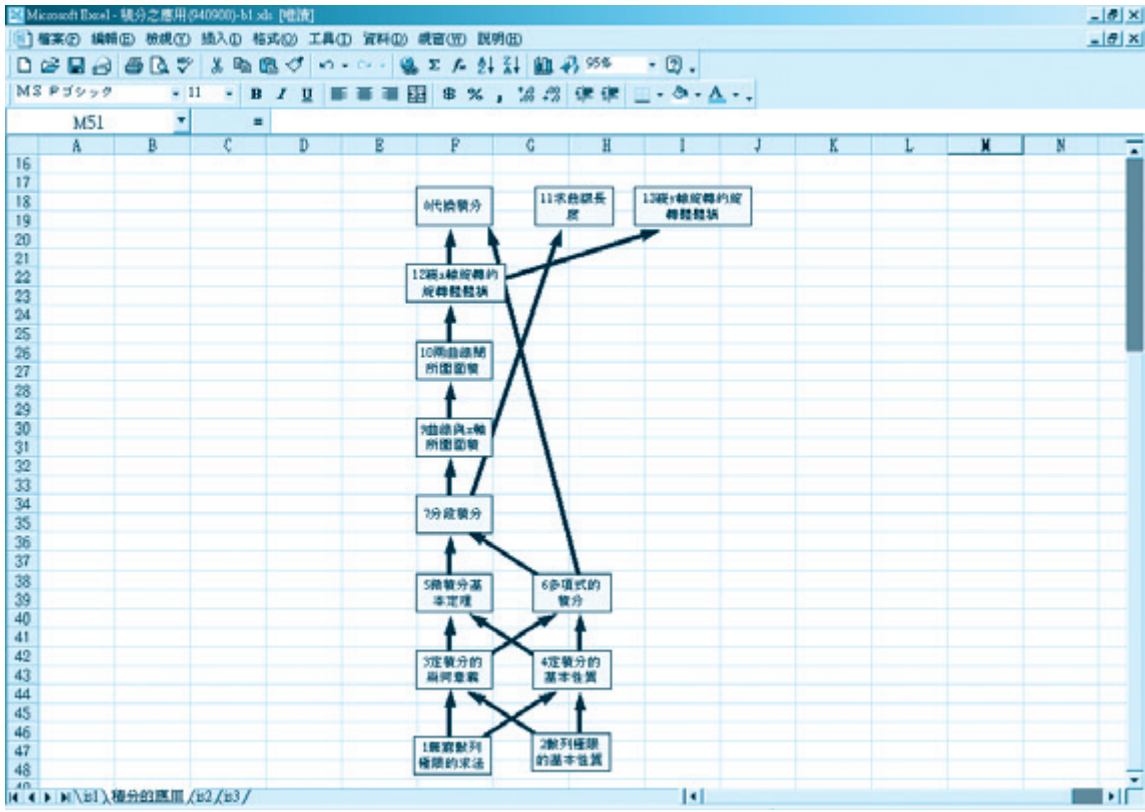


▲ 圖 1 積分與應用－學習目標分析架構圖

二、學習目標要素間的關聯表現

接下來，將這些教材要素排列出學習先後的問題，即考慮教材要素間的「前提－目標」（由前到後）關聯性；也就是說，必須區分出「前要素（predecessor element）」與「後要素（successor element）」前後關聯的比較排列，使學習的方向從前要素指向後要素。也就是將全部教材內容製成「學習要素關係分析表」。實際作法如下：將全部教材要素逐一兩兩相互比較其間是否存有前後關聯性，亦即前要素是學習後要素所必備的能力，即前要素是學習後要素之先備知識，若有前後關係者畫記為「1」，無前後關係者，則以「0」表示，如本例：前要素 3「定積分的幾何意義」與後要素 4「定積分的基本性質」、5「微積分基本定理」、6「多項式的積分」、7「分段積分」之交集格中畫記「1」。最後完成全部項目教材要素間關聯表現之「要素因果關係表」，如表 1 所示。

表 1 「積分與應用」之教材要素關係分析表

[illegible]

▲圖 2 積分與應用—學習階層路徑圖

三、詮釋結構模式(ISM)教材構造圖

利用電腦軟體設計程式，我們可以將步驟二的「學習要素關係分析表」交由電腦分析處理，並描繪出 ISM 結構圖。再經過人為的思考整理左右排列順序（注意不可更動上下階層的排列順序），使得 ISM 圖形的結構更符合教學者原先的想法。最後，將階層矩陣圖轉化成為「ISM 教材構造圖」及最佳化「學習路徑」分析圖，如圖 2 所示。

學習階層路徑圖，是以電腦軟體程式運算，電腦軟體程式為使用 Microsoft Excel 應用程式中的 Visual Basic for Application 語言所自行編寫的巨集程式，用以描述學習教材內容之間的學習順序，最後產生具體化、結構化的概念階層圖。根據學習階層路徑圖，讓老師能掌握本學習單元的整體脈絡，在上課之前先給予學生本單元的學習地圖，讓學生充分了解教材的整體內容結構，促進有效學習。

四、設計學習教材

欲發展設計出完整的學習教材，除了要將教材的學習要素一一抽出構成學習目標架構圖之外，並分析學習要素之前後關係地位，以電腦程式輔助繪出 ISM 結構圖，再加上學習路徑的概念圖示，融會貫通形成一個結構化的組織。設計出有效學習的指導內容結構化教材。（如表 2、表 3）

▼表 2 學習內容分析

時間分配	學習內容	學習目標	評量重點
20 分	1.無窮數列極限的求法	認識無窮數列的意義	能判斷無窮數列的極限值
10 分	2.數列極限的基本性質	了解數列極限的基本性質	能運用數列極限的性質解題
10 分	3.定積分的幾何意義	認識定積分的幾何意義	能以幾何的觀念配合極限解積分的問題
10 分	4.定積分的基本性質	了解定積分的基本性質	能運用定積分的性質解題
20 分	5.微積分基本定理	了解微積分基本定理	能運用微積分基本定理解題
10 分	6.多項式的積分	認識多項式的積分	能運用微積分基本定理理解多項式的積分
10 分	7.分段積分	認識分段積分的定義及用法	能運用微積分基本定理理解分段積分
20 分	8.代換積分	認識代換積分定義及用法	能運用微積分基本定理理解代換積分
10 分	9.曲線與 x 軸所圍面積	了解曲線與 x 軸所圍面積的定義	能求出曲線與 x 軸所圍面積
10 分	10.兩曲線間所圍面積	了解兩曲線間所圍面積的定義	能求出兩曲線間所圍面積
10 分	11.求曲線長度	認識曲線長度的幾何意義	能求出曲線段長度
20 分	12.繞 x 軸旋轉的旋轉體體積	了解繞 x 軸旋轉的旋轉體體積	能求出繞 x 軸的旋轉體體積
20 分	13.繞 y 軸旋轉的旋轉體體積	了解繞 y 軸旋轉的旋轉體體積	能求出繞 y 軸的旋轉體體積

表 3 積分與應用－補救教學教材

單元名稱	積分及其應用	單元內容	3-1 無窮數列的極限
內容名稱	數列、極限		
單元學習目標	認識無窮數列的意義		
時間分配	章節點	教學內容	
5 分	3-1.1	1. 數列：依某種次序排列的一串數，稱為數列。以 $\langle a_n \rangle$ 或 $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ 來表示。	
10 分	3-1.2	2. 有限數列：若數列的項數為有限個時，稱此數列為有限數列。 3. 無窮數列：若數列的項數為無限多項時，稱此數列為無窮數列。 4. 無窮數列之意義：無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ，當 $n \rightarrow \infty$ 時， a_n 會趨近於某一定數 α ，則稱 α 為此數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限值。以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 表示。 (1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限存在，則稱 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列。 (2) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限不存在，則稱 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列。 例如： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \langle \frac{1}{n} \rangle$ 為收斂數列 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty$ 極限不存在 $\Rightarrow \langle n^3 \rangle$ 為發散數列	
單元評量			
1. 下列何者為發散數列？ (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-5)}{n-1}$ 。 2. 下列何者為收斂數列？ (A) $\langle (-1)^n + 1 \rangle$ (B) $\langle (-\frac{1}{2})^n \rangle$ (C) $\langle (-1)^n \times 2 \rangle$ (D) $\langle -n \rangle$ 。 3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-6}{3n^2} =$ (A) $\frac{2}{3}$ (B) -3 (C) 0 (D) ∞ 。 4. 求數列 $\langle \frac{3^{n-2} \times 2^{n-1}}{2n} \rangle$ 的第 3 項為 (A) 2 (B) 13 (C) 14 (D) 15 。 5. 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n-1} - \frac{n-1}{2n+1} \right) =$ (A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0 。			

五、編製測驗題目

編製測驗評量時，首應訂定評量時所欲達成的教學目標，而用來描述具體學習結果所用的術語，必須是可觀察的行為，且可用以描述不同層次的學習成果。接著將教學目標及學習內容一覽表兩者分別列舉於後，以便能編製出一個雙向細目表，用於決定教學目標（學習結果）與學習內容（教材內容）的關係，即訂出各個不同領域之相對比重，期能評量出教學者所預期之學習結果及教材的代表模式。最後，再依據雙向細目表與教材和練習題等教學內容分析，製作測驗題目時的指引。如表 4。

▼表 4 「積分與應用」－雙向細目表

學習結果 教材內容	知識				理解			應用	總計
	描述	定義	原理	概念	轉換	辨別	歸納	計算	
1.無窮數列極限的求法		1							1
2.數列極限的基本性質				1					1
3.定積分的幾何意義		1		1					2
4.定積分的基本性質				1					1
5.微積分基本定理				1				1	2
6.多項式的積分		1						1	2
7.分段積分				1				1	2
8.代換積分					1			1	2
9.曲線與 x 軸所圍面積								1	1
10.兩曲線間所圍面積								1	1
11.求曲線長度				1					1
12.繞 x 軸旋轉的旋轉體體積						1		1	2
13.繞 y 軸旋轉的旋轉體體積						1		1	2
題目總數		3		6	1	2		8	20

對測驗編製者而言，雙向細目表猶如編製測驗題目時的藍圖，它詳細而可一目瞭然的說明測驗題的數目及性質。類似矩陣表格之雙向細目表，能發現學習結果與教材內容間的關係，並訂出各個不同範疇之相對比重（矩陣中每個細格內的數字為考試題數，其取決於每項學習結果和教材內容之比重為何而定），最後，再加總各項依教材內容來分、依學習結果來分，及全部總題數等三類的總數，以確保測驗能評量出吾人所預期之學習結果及教材的代表模式。故依照前項雙向細目表編製一份「積分與應用」單元評量測驗卷，如表 5 所示，作為教師教學之檢討依據。

表 5 積分與應用－評量測驗卷（部分範例）

台北市○○高中 九十三學年度第一學期			☐ 期中考試 ☐ 期末考試 ☒ 其他(平時考)	本試卷 共 頁	得分
考試科目	數 學	適用班級	高三重補修學生	月 日 第 節	命題教師：王素賢
班級：		學號：		姓名：	

一、單選題：（每題 5 分）

() 1. 下列何者為收斂數列？ (A) $\langle (-1)^n \rangle$ (B) $\langle (\frac{1}{2})^n \rangle$ (C) $\langle (-1)^n \times 3 \rangle$ (D) $\langle n \rangle$ 。

() 2. 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2-n+1} =$ (A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$ 。

() 3. 函數 $f(x)$ 的圖形如下，則定積分 $\int_{-2}^3 f(x) dx =$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) $-\frac{1}{2}$ 。

4. 試由幾何圖形面積求定積分 $\int_{-1}^3 |x| dx =$ _____。

() 5. 設 $\int_2^3 f(x) dx = 3$ ， $\int_3^6 f(x) dx = 2$ ，則 $\int_2^6 3f(x) dx =$ (A) 24 (B) 20 (C) 18 (D) 15。

() 6. 設 $f(x) = 3x^2 - 2x$ ，下列哪一個是 $f(x)$ 的反導函數？ (A) $x^3 + x^2$ (B) $x^3 - x^2 + 5$ (C) $3x^3 - 2x^2$ (D) $3x^3 - 2x^2 - 10$ 。

() 7. $\int_0^2 (3x-2)(x+4) dx =$ (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12。

() 8. $\int_{-1}^2 (4x-3x^2) dx =$ (A) -1 (B) -3 (C) 13 (D) 14。

() 9. 求曲線 $y = 4 - x^2$ 與 x 軸所成區域面積為 (A) $\frac{28}{3}$ (B) 10 (C) $\frac{32}{3}$ (D) 12。

() 10. 坐標平面上兩曲線 $y = x^2$ 與 $y = 18 - x^2$ 所圍成區域面積為 (A) 54 (B) 56 (C) 60 (D) 72 平方單位。

() 11. 由 $y = x^2$ ， $y = 0$ ， $x = 2$ 所圍成的區域，繞 x 軸旋轉之旋轉體體積為 (A) $\frac{32}{5}\pi$ (B) $\frac{24}{5}\pi$ (C) $\frac{18}{5}\pi$ (D) $\frac{16}{5}\pi$ 。

結語

結構化教材設計的最後一個步驟是編製測驗試題，但這並不是整個教學活動的結束，而是新的開始。透過評量，老師能夠了解學生的學習狀況，並針對問題調整教學方式，提昇教學效果。以「S-P」表作為試題品質及學習狀況的診斷工具是我們非常樂於推薦的，但因篇幅所限，無法在本文加以介紹，有興趣的讀者可翻閱參考文獻[1]。

身為數學科基層教師的我，常常期許自己要學習宗教家渡化眾生、包容萬物的精神，用心啟發學生的良知、良能，讓每個孩子在春風化雨中都能適才適性的成長，但經常事與願違。回想起初執教鞭之時，站在教育的舞臺上賣力揮灑，說得口沫橫飛，就在自得其樂，洋洋得意之時，頓時發現學生呆滯的表情，望著黑板，當時的我教學挫折感和無力感可想而知。

教育就像種樹，每一顆種子都蘊藏有改變整個世界的潛力，而老師正是灌溉種子以及開啟潛力的人。綜觀目前的教育體制，我們從小學到高中畢業，整整十二年，我們不知花多少時間學習數學，然而很多學生，不止對數學不感興趣，更對上數學課感到恐懼，這對所有的數學教育者、課程標準的制定者及升學管道的規劃者，都應該深思反省。

參考文獻

[1] 王素賢、蔡秉燁（2003）。運用結構化教學於高職數學科個別化學習之研究。

台北市第四屆教育專業創新與行動研究。P.141-158。

[2] 蔡秉燁、鍾靜蓉（2003a）。結構化教材設計法之理論與應用。電化教育研究。118期，P.41-46。

[3] 蔡秉燁、鍾靜蓉（2003b）。詮釋結構模式運用於結構化教學設計之研究。教育研究資訊。11卷，2期，P.1-40。



用 Lambert 定理作拋物線

94 指考數甲試題的討論

◎沈朋裕／建國中學

前言

每年七月初總是有許多老師聚集在補習班，忙著將指定考科的答案迅速公布在報紙或文宣上，今年數學甲的多選第 9 題，補習班所公布答案與大考中心的答案不同，到底問題出在哪裡？解法又該如何？本文將有所討論。

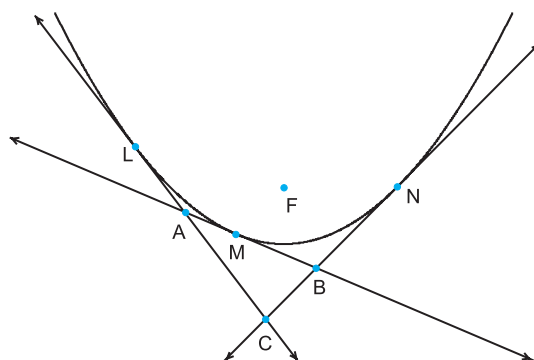
題目

有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x -軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：

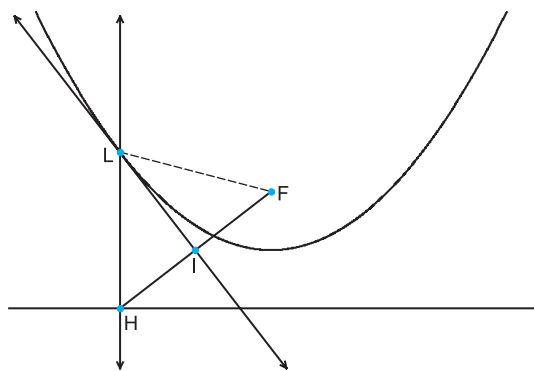
- (1) 此拋物線的對稱軸必為 y -軸。
- (2) 若此拋物線對稱軸為 y -軸，則其焦距為 1。
（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）
- (3) 此拋物線的頂點必在 x -軸上。
- (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

討論

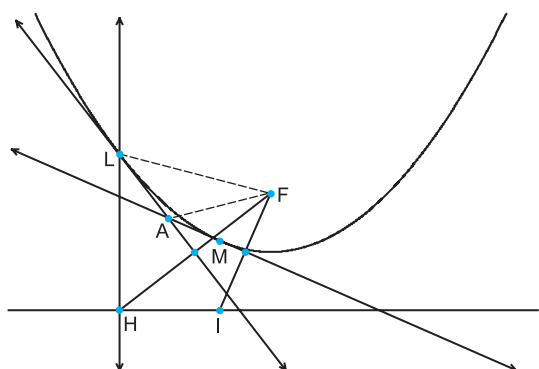
德國數學家 J.H.Lambert 發現一定理：設拋物線的焦點為 F ，其三條相異切線兩兩的交點為 A 、 B 、 C ，則 F 、 A 、 B 、 C 四點共圓。



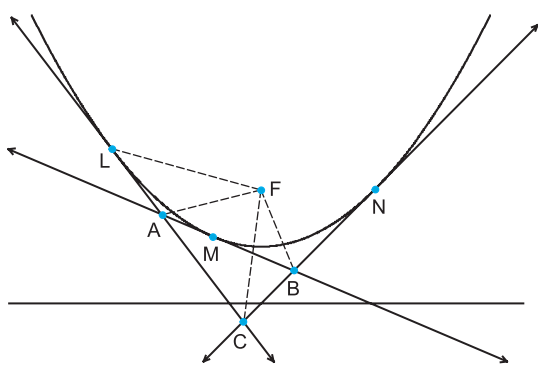
首先我們先對拋物線的切線有所了解：過拋物線上一點 L 作切線，設 L 對準線的垂足為 H ，由拋物線的定義可知，此切線可視為 $\overline{HF}$ 的中垂線。



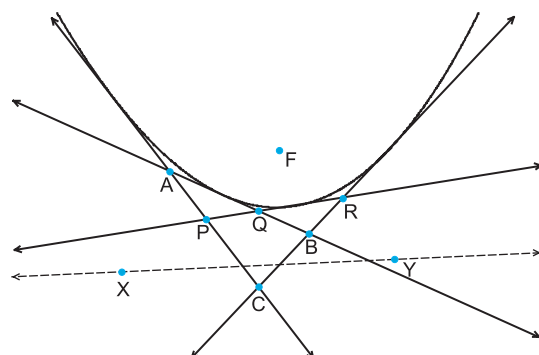
過拋物線上兩相異點 L 、 M 作切線，設兩切線交於 A 點，因 $\angle ALF$ 與 $\angle LFH$ 互餘、 $\angle LHF$ 與 $\angle IHF$ 互餘、 $\angle LFH = \angle LHF$ ，故 $\angle ALF = \angle IHF$ 。又因兩切線可視為 $\overline{HF}$ 、 $\overline{IF}$ 的中垂線，故 A 為 $\triangle IHF$ 外接圓的圓心，此時 $\angle IHF$ 是圓弧 IF 的圓周角，而 $\angle FAM$ 是圓弧 IF 圓心角的一半，故 $\angle ALF = \angle MAF$ 。



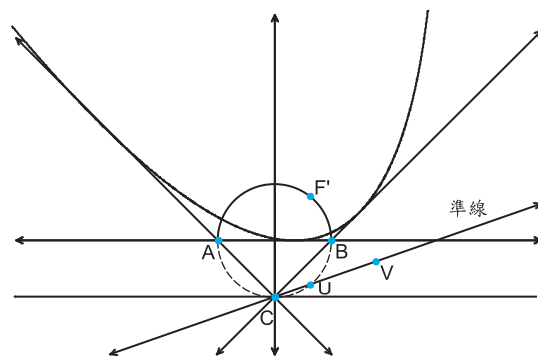
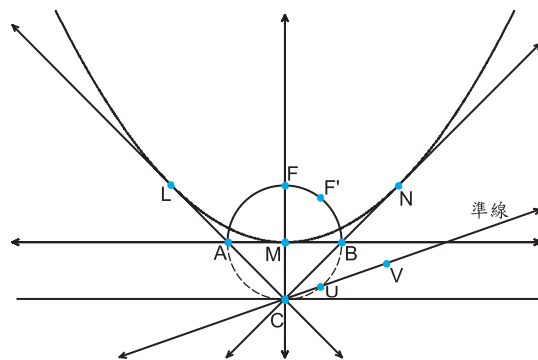
現在考慮三條切線，在符號不混淆的情形下，我們將切線與切點用相同的符號表示。由上述討論可知，因切線 L 與切線 M 交於 A 點，故 $\angle ALF = \angle BAF$ ；又因切線 L 與切線 N 交於 C 點，故 $\angle ALF = \angle BCF$ ，因此 $\angle BAF = \angle BCF$ ，所以 F 、 A 、 B 、 C 四點共圓。我們證明了 Lambert 定理：拋物線三切線所形成的三角形頂點與焦點共圓。



由 Lambert 定理可作出在平面上包絡於四直線（無三線共點）的拋物線：設四直線兩兩的交點為 A 、 B 、 C 、 P 、 Q 、 R ，而切線所形成的四個三角形 ACB 、 APQ 、 PCR 、 QBR ，取其外接圓的共同交點 F 作為焦點^(註1)，再用 F 點對任意兩直線作鏡像點，此兩鏡像點連線作為準線^(註2)，即為所求。



回到今年數學甲的多選第 9 題，直線 x -軸、 $y = x - 1$ 、 $y = -x - 1$ 是拋物線的切線，由 Lambert 定理可知，焦點必落在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，也就是以原點為中心、半徑為 1 的上半圓上。除了 $F(0,1)$ 之外，在單位圓上的另一點 F' 也可以當焦點，將 F' 點對 x -軸、 $y = x - 1$ 作鏡像點分別為 U 、 V ，則我們可以得到一以 F' 為焦點、直線 UV 為準線的拋物線，當然它會同時與直線 x -軸、 $y = x - 1$ 、 $y = -x - 1$ 相切。



結語

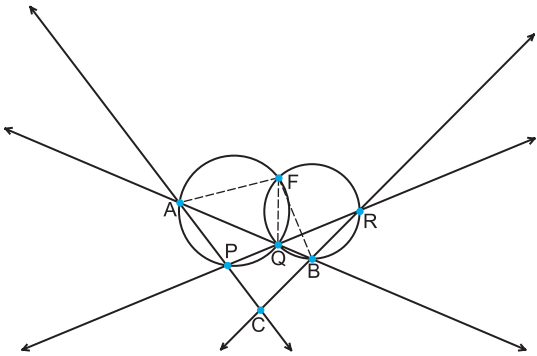
每年大考結束時，記者常會訪問補教業者考題的難易度，今年北市某知名補習班老師批評，今年數甲的考題沒有創意，是歷年來出得最差的一次，筆者看到如斯的評論只有莞爾一笑，深深感到多讀書的重要。不過這次的考題也是有值得檢討的一面，正如第 9 題，答對的學生是真的會，抑或是用猜的？答錯的同學是否只能怪直覺錯誤？或是膽子太大？一來一往就差了 12 分，這題的鑑別度實在值得注意，想到炎炎夏日學生做到這題時，到底該不該猜呢？

To be or not to be is a question.

附註

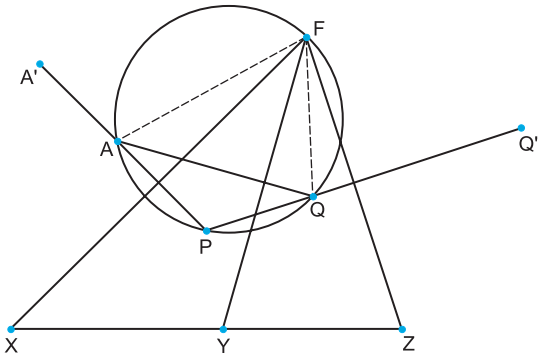
[1] 四外接圓共同交點 F 的存在性：

設 F 為 $\triangle APQ$ 與 $\triangle QBR$ 外接圓的另一交點，很明顯地， $\angle AFQ = \angle QPC$ ， $\angle BFQ = \angle BRQ$ ，所以 $\angle AFB + \angle ACB = 180^\circ$ ，故 F 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，同理 F 也在 $\triangle PRC$ 的外接圓上。



[2] F 點對四直線作鏡像點的共線性：

設 F 點對直線 AP 、直線 AQ 、直線 PQ 的鏡像點分別為 X 、 Y 、 Z ，連接線段 XY 與線段 YZ 。因 A 點是 $\triangle QBR$ 的外心，所以 $\angle FYX = \angle FAA'$ （圓周角等於圓心角的一半），同理， $\angle FYZ = \angle FQQ'$ 。因 $\angle FAA' = \angle FQP$ ， $\angle FQQ' = \angle FAP$ ，且 $\angle FQP + \angle FAP = 180^\circ$ ，故 $\angle FYX + \angle FYZ = 180^\circ$ 。



本文投稿日期：94 年 7 月 8 日

第 11 期《數學新天地》勘誤表

錯誤現場
P.44 解析投稿名單 說明： 第 11 期投稿名單中由柳惠娟老師指導的鄭光恒、江愷翔同學應更正為立人高中，在此致歉。
P.47 解二 說明： 原解析已求得以下三式成立： $\begin{cases} a^2 + A^2 = l^2 - 2aA \\ b^2 + B^2 = l^2 - 2bB \\ c^2 + C^2 = l^2 - 2cC \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} aA \leq \frac{l^2}{4} \\ bB \leq \frac{l^2}{4} \\ cC \leq \frac{l^2}{4} \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} 2aB \leq a^2 + B^2 \\ 2bC \leq b^2 + C^2 \\ 2cA \leq c^2 + A^2 \end{cases}$ 以上述條件計算： $\begin{aligned} aB + bC + cA &\leq \frac{a^2 + B^2}{2} + \frac{b^2 + C^2}{2} + \frac{c^2 + A^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + A^2}{2} + \frac{b^2 + B^2}{2} + \frac{c^2 + C^2}{2} \\ &= \frac{l^2 - 2aA}{2} + \frac{l^2 - 2bB}{2} + \frac{l^2 - 2cC}{2} \\ &= \frac{3}{2}l^2 - (aA + bB + cC) \\ &\geq \frac{3}{2}l^2 - \left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) \\ &\quad \left(\because aA + bB + cC \leq \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) \end{aligned}$ 由上式的演算過程， $aB + bC + cA \leq \frac{3}{4}l^2$ 是無法得到證明的。 （以上訊息由鹿港高中鄭仕豐老師提供，謹此致謝。）

國立臺灣師範大學數學系

九十三學年度推薦甄選入學指定項目甄試試題

壹、計算證明題：（每題 9 分，合計 45 分。測驗時間 2 小時）

- 一、古埃及人將分子為 1，分母為正整數的分數稱為「么分數」，他們將么分數視為基本單位，而將一般的正分數表示成么分數的和。若

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{21}, \frac{1}{b}$$

三個么分數依序形成等差數列，其中 a 與 b 是正整數且 $a < b$ ，則 a 與 b 的值分別為何？

- 二、試討論 x 與 y 應滿足什麼條件，才能使不等式

$$\log_x(xy) \geq 4 \log_{xy}y$$

成立。

- 三、設 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則曲線 $(4 - 2\sin\theta)x^2 - (3\cos\theta)y = 0$ 與直線 $3x - y = 0$ 都有兩個交點（可能重合）。試問：當 θ 為何值時，這兩個交點的距離最大。

- 四、已知雙曲線 $\Gamma: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 通過下述五個點：

$$P_1(0, 1), P_2(0, -1), P_3(1, 2),$$

$$P_4(1, -2) \text{ 與 } P_5(-2, 0),$$

試求雙曲線 Γ 的兩焦點坐標。

- 五、在某次網球友誼賽的兩場比賽中，一共準備了 12 顆網球，其中 7 顆是用過的球、5 顆是新球。假設每顆球被取用的機率相等。

- (1)如果在第一場比賽中只用到 12 顆球的 3 顆，試求這 3 顆球都是新球的機率？（4 分）
(2)如果在第二場比賽中也只用到 12 顆球中的 3 顆，試求這 3 顆球在第二場比賽前都沒被用過的機率？（5 分）

貳、填充題：（每題 5 分，合計 40 分。測驗時間 120 分鐘）

- 一、對於任意實數 x 而言， $2x^2 + 2(k-4)x + k$ 恆為正數，則 k 的範圍為_____。

- 二、設 a, b 為正整數，若 $a < b$, $2a + 5b = 135$ ，且 a 與 b 的最小公倍數為 105，則數對 (a, b) 為_____。

- 三、若 $f(x) = 123x^4 - 234x^3 - 345x^2 + 225x + 100$ ，則 $f(3)$ 之值為_____。

- 四、假設 $(12, 12\sqrt{3})$ 與 $(-12, -12\sqrt{3})$ 為平面上某一個橢圓之兩個焦點，而點 $(-5\sqrt{3}, 5)$ 落在這個橢圓上，則這個橢圓的內切圓之最大半徑為_____。

- 五、有一底半徑為 3、高為 4 的直圓錐面，若其內部有一球與底面相切，且與直圓錐面的切痕形成一個圓，則此圓的半徑為_____。

- 六、已知一正立方體的八個頂點的坐標如下：

$$(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1),$$

$$(1, 1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1), (1, -1, -1)$$

今有一平面 $x + 2y + 3z = 4$ 與此正立方體相截，則其相截的截面面積為_____。

- 七、甲玩一種遊戲，勝敗的機率相等，勝則得 1 元，敗則失 1 元。若每回的勝敗獨立，當甲累積得 2 元或失 2 元則不再玩。已知甲玩第一回失 1 元，則最後甲得 2 元的機率為_____。

- 八、有五位同學，其中三位同學的身高分別為 171 公分，175 公分，176 公分，另兩位同學的身高分別為_____時，這五位同學身高的標準差會最小。

註：指定項目甄試成績佔總成績之 85%，剩餘 15% 採計學測成績。詳請可上網查詢：www.math.ntnu.edu.tw



國立臺灣師範大學數學系

九十三學年度推薦甄選入學指定項目甄試試題

◎郭家瑋／臺灣師範大學數學系

壹、計算證明題：

一、因為等差中項為 $\frac{1}{21}$ ，所以

$$\begin{aligned}\frac{2}{21} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ \Rightarrow 2ab - 21a - 21b &= 0 \\ \Rightarrow a(2b - 21) - 21b &= 0 \\ \Rightarrow a(2b - 21) - \frac{21}{2}(2b - 21) &= \frac{441}{2} \\ \Rightarrow (a - \frac{21}{2})(2b - 21) &= \frac{441}{2} \\ \Rightarrow (2a - 21)(2b - 21) &= 3^2 \cdot 7^2\end{aligned}$$

由最後的因數分解得到

$2a-21$	1	3	7	9
$2b-21$	441	147	63	49

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} a & 11 & 12 & 14 & 15 \\ b & 231 & 84 & 42 & 35 \end{array}$$

故

$$(a, b) = (11, 231), (12, 84), (14, 42) \text{ 或 } (15, 35).$$

□

二、根據對數的定義，可知 $x > 0, x \neq 1, y > 0$ 且 $xy \neq 0$ 。因為

$$\begin{aligned}\log_x(xy) - 4\log_{(xy)}y &= \frac{\log_{10}(xy)}{\log_{10}x} - \frac{4\log_{10}y}{\log_{10}(xy)} \\ &= \frac{\log_{10}x + \log_{10}y}{\log_{10}x} - \frac{4\log_{10}y}{\log_{10}x + \log_{10}y} \\ &= \frac{(\log_{10}x + \log_{10}y)^2 - 4\log_{10}x \log_{10}y}{\log_{10}x(\log_{10}x + \log_{10}y)} \\ &= \frac{(\log_{10}x - \log_{10}y)^2}{\log_{10}x(\log_{10}x + \log_{10}y)},\end{aligned}$$

所以不等式 $\log_x(xy) \geq 4\log_{(xy)}y$ 成立的充要條件是

$$(\log_{10}x - \log_{10}y)^2 \geq 0 \text{ 且 } \log_{10}x(\log_{10}x + \log_{10}y) > 0,$$

也就是說

$$(\log_{10}x - \log_{10}y)^2 \geq 0 \text{ 且 } \log_{10}x \log_{10}xy > 0,$$

即

$$0 < x < 1, 0 < xy < 1 \text{ 或 } x > 1, xy > 1. \quad \square$$

三、曲線 $(4 - 2\sin\theta)x^2 - (3\cos\theta)y = 0$ 與直線 $3x - y = 0$ 的兩個交點坐標為 $(0, 0)$ 與 $(\frac{\cos\theta}{4 - 2\sin\theta}, \frac{3\cos\theta}{4 - 2\sin\theta})$ 。因此，這兩個交點的距離為

$$\frac{|\cos\theta|\sqrt{10}}{4 - 2\sin\theta}.$$

令

$$k = \frac{\cos\theta}{4 - 2\sin\theta},$$

整理得

$$2k\sin\theta + \cos\theta = 4k.$$

利用不等式

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\sin\theta + b\cos\theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

得到

$$-\sqrt{4k^2 + 1} \leq 4k \leq \sqrt{4k^2 + 1} \Rightarrow (4k)^2 \leq 4k^2 + 1,$$

也就是說

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(1) 當 $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 時，對應的 θ 滿足

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1 \\ \Rightarrow \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) &= 1 \\ \Rightarrow \theta &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

(2) 當 $k = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 時，對應的 θ 滿足

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta &= 1 \\ \Rightarrow \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) &= 1 \\ \Rightarrow \theta &= \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

綜合得到：當 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 時，兩個交點的距離最遠，此時的距離為 $\frac{\sqrt{30}}{6}$ 。□

四、由坐標點觀察知圖形的實軸為 $y=0$ ，並令中心坐標為 $(t, 0)$ ，故

$$\Gamma: \frac{(x-t)^2}{a^2} - \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1.$$

將 $(0, 1)$ 代入 Γ 的方程式得

$$\frac{(-t)^2}{a^2} - \frac{(1-0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{t^2 - a^2}; \quad (1)$$

將 $(1, 2)$ 代入 Γ 的方程式得

$$\frac{(1-t)^2}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1; \quad (2)$$

再將 $(-2, 0)$ 代入 Γ 的方程式得

$$\frac{(-2-t)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = t^2 + 4t + 4. \quad (3)$$

將(1)代入(2)得到

$$\frac{4t^2 - 1 + 2t - t^2}{a^2} = 3 \Rightarrow 3a^2 = 3t^2 + 2t - 1. \quad (4)$$

由(3) $\times$ 3 - (4) 得到

$$10t + 13 = 0 \Rightarrow t = -\frac{13}{10}.$$

代入(3)與(1)解得

$$a^2 = \left(-\frac{13}{10}\right)^2 + 4\left(-\frac{13}{10}\right) + 4 = \frac{49}{100};$$

$$b^2 = \frac{\frac{49}{100}}{\frac{169}{100} - \frac{49}{100}} = \frac{49}{120};$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 = \frac{49}{100} + \frac{49}{120} = \frac{49 \cdot 11}{600} \\ \Rightarrow c &= \pm \frac{7\sqrt{66}}{60}. \end{aligned}$$

故雙曲線的中心為 $\left(-\frac{13}{10}, 0\right)$ ，兩個焦點坐標

$$\left(-\frac{78+7\sqrt{66}}{60}, 0\right) \text{ 與 } \left(-\frac{78-7\sqrt{66}}{60}, 0\right). \quad \square$$

五、(1)根據題意，所求的機率為

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{7}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{10 \cdot 1}{220} = \frac{1}{22}.$$

(2)根據題意，第一場比賽用過的新球可能為 0 個，1 個或 2 個，因此所求的機率為

$$\begin{aligned} &\frac{\binom{5}{0}\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} \\ &= \frac{1 \cdot 35 \cdot 10 + 5 \cdot 21 \cdot 4 + 10 \cdot 7 \cdot 1}{220 \cdot 220} \\ &= \frac{21}{1210}. \quad \square \end{aligned}$$

貳、填充題：

一、因為恆正，所以判別式小於零，也就是說

$$\begin{aligned} (2(k-4))^2 - 4 \cdot 2 \cdot k &< 0 \\ \Rightarrow k^2 - 10k + 16 &< 0 \\ \Rightarrow (k-2)(k-8) &< 0 \\ \Rightarrow 2 < k < 8. \quad \square \end{aligned}$$

二、設 $(a, b) = d$ ，由 $d | (2a + 5b)$ 與 $d | [a, b]$ 得到 $d | 135, d | 105$ ，故

$$d | (135, 105) \Rightarrow d | 15,$$

也就是說 $d = 1, 3, 5$ 或 15 。

當 $(a, b) = d = 3$ 時，由 $ab = a, b$ 得到

$$ab = 105 \times 3 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$\Rightarrow \text{數對 } (a, b) = (3, 105) \text{ 或 } (15, 21).$$

代入 $2a + 5b = 135$ 發現只有數對 $(a, b) = (15, 21)$ 時，滿足此式。

當 $d = 1, 5$ 或 15 時，仿上述作法， (a, b) 的解都不合。

故數對 $(a, b) = (15, 21)$ 。□

三、因為 $f(3)$ 是 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式，所以由綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 123 & -234 & -345 & +225 & +100 & & 3 \\ & +369 & +405 & +180 & +1215 & & \\ \hline 123 & +135 & +60 & +405 & +1315 & & \end{array}$$

知道 $f(3) = 1315$ 。□



四、根據題意得知長軸 $2a$ 與焦距 $2c$ 為

$$2a = \sqrt{(12+5\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(-12+5\sqrt{3})^2 + (-12\sqrt{3}-5)^2} \\ = 2\sqrt{676};$$

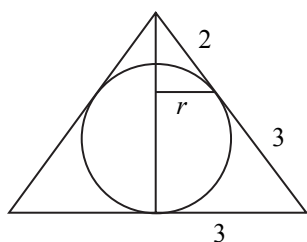
$$2c = \sqrt{(12+12)^2 + (24\sqrt{3})^2} \\ = 2\sqrt{576}.$$

因此短軸 $2b$ 為

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{676 - 576} = 10.$$

橢圓內切圓中，以橢圓中心為圓心，短軸為直徑的圓最大，故最大內切圓半徑為 $b = 10$ 。

五、如下剖面圖所示：



令與直圓錐面切痕形成的圓之半徑為 r ，由三角形的相似性質得到

$$\frac{r}{3} = \frac{2}{5},$$

解得

$$r = \frac{6}{5}.$$

六、平面 $x + 2y + 3z = 4$ 與正立方體的截面是以

$$A(1, 0, 1), B\left(1, 1, \frac{1}{3}\right), C(-1, 1, 1)$$

為頂點的三角形。

計算 $\overrightarrow{AB} = \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right)$ 與 $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 0)$ 的夾角 $\theta = \angle BAC$ ：

由內積公式得到

$$0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0 \\ = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{5} \cos \theta,$$

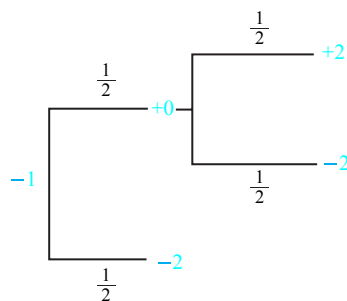
解得

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{65}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}.$$

三角形截面面積為

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}} \\ = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

七、如果一開始是沒輸，沒贏，那麼得兩元與失兩元而停的機率各是 $\frac{1}{2}$ 。由底下的樹形圖



得知：最後甲得 2 元的機率為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

八、設令兩人的身高分別為 a 與 b 公分。此時五人的平均身高 μ 為

$$\mu = \frac{171 + 175 + 176 + a + b}{5},$$

而標準差 σ 為

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\mu - 171)^2 + (\mu - 175)^2 + (\mu - 176)^2 + (\mu - a)^2 + (\mu - b)^2}{5}} \\ \geq \sqrt{\frac{(\mu - 171)^2 + (\mu - 175)^2 + (\mu - 176)^2}{5}}.$$

最後的平方和是 μ 的二次函數，故當

$$\mu = \frac{171 + 175 + 176}{3} = 174$$

時，會產生最小值。當 $a = b = 174$ 時，五人的平均身高恰是 174 公分，此時的標準差最小。



參考解答

問題集XI

誌謝

感謝全國師生對問題集的熱烈迴響！由於篇幅所限，我們實在無法將全部稿件一一刊載，敬請大家見諒。底下是所有參與問題集XI的師生名單，《數學新天地》謹此致上最深的謝意：

林永宗／苑裡高中；郭儒鍾／桃園高中；蘇啟天／三民高中；王憲津／斗六高中；陳文憲、黃俊瑋、金建蕙／前鎮高中；李孟勳同學／中正中學 1 年 20 班；黃俊豪／中道中學；黃嵩茗同學（黃俊豪老師指導）／中道中學高二愛班；李維昌／宜蘭高中；董涵冬／三重高中；許世易／文華高中；蔡耀璋／南澳高中；胡照南／台南高商；黃冠崧、周大為、王瑞陽／台中一中；王紹宣／麗山高中；翁煜庭同學／台中二中 2 年 17 班；王宏哲／台中二中；蘇智全／台南高工；許紋潯／家齊女中；陳俊廷／北港高中；劉旭耀／高雄高工；鄭建邦／馬公高中；張進安／中正高中；陳基正／善化高中；郭博誠／中山高中；張弘明同學／台中二中 2 年 17 班；李添郡／路竹高中；范光耀同學（傅國祥老師指導）／新竹高工綜二丁；李建暉同學（呂基台老師指導）／大里高中 1 年 12 班；黃哲男／台南大學附屬高中；姚建銘／瑞祥高中；呂明琮同學／嘉義女中 2 年 12 班；張修斌／大安高工；台北市私立大同高中高一勤班（楊雅茵老師指導）；鄭仕豐／鹿港高中；林益通／嘉義女中；羅仲儀／花蓮高中；連挺軒同學／立人高中 2 年 4 班（以上依進稿先後順序排列）

11-1.

- (1) 證明每個格子點至點 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 的距離都不一樣。
- (2) 設 n 是一個正整數。證明：可以在坐標平面上找到一個圓，使其內部（不含圓周）剛好有 n 個格子點。

【解】（許紋潯老師／家齊女中）

- (1) 利用反證法。設存在相異格子點 A, B 使得 $\overline{PA}$

$$= \overline{PB}, \text{ 其中 } P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$\therefore \overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow P$ 必在 $\overline{AB}$ 之中垂線 L 上，

又 A, B 為格子點

$$\Rightarrow L: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0, \text{ 且 } a, b, c \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow P \in L \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} + b \cdot \frac{1}{3} + c = 0.$$

$$(i) \text{ 若 } a \neq 0, \sqrt{2} = \frac{\frac{b}{3} + c}{-a} \notin \mathbb{Q} (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow P \notin L.$$

$$(ii) \text{ 若 } a = 0, L: by + c = 0 \text{ 為一水平線} \\ \Rightarrow \overline{AB} \text{ 必在同一鉛垂線上。}$$

$$\text{令 } A(p, q_1), B(p, q_2), q_1 \neq q_2, q_1, q_2, p \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 &= \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(q_2 - \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= q_1^2 - q_2^2 - \frac{2}{3}(q_1 - q_2) \\ &= (q_1 - q_2) \left(q_1 + q_2 - \frac{2}{3}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \notin L$$

□

由(i)(ii)知， $P \in L$ ($\overline{AB}$ 之中垂線)，故每個格子點至 $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 之距離均相異。

- (2) 由(1)，考慮點列

$$\{A_n \mid A_n \text{ 為格子點}, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \overline{A_i P} < \overline{A_j P}, \forall i < j\},$$

可知 $\overline{A_1 P} < \overline{A_2 P} < \dots < \overline{A_n P} < \overline{A_{n+1} P} < \dots$ 。今以

$P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 為圓心， r 為半徑作圓，得知

當取 $\overline{A_1 P} < r < \overline{A_2 P}$ 時，圓 P 內有格子點 A_1
 $\Rightarrow 1$ 個格子點；

當取 $\overline{A_2 P} < r < \overline{A_3 P}$ 時，圓 P 內有格子點 A_1, A_2
 $\Rightarrow 2$ 個格子點；依此類推...

當取 $\overline{A_n P} < r < \overline{A_{n+1} P}$ 時，圓 P 內有格子點 $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow n$ 個格子點。得證。 $\square$

11-2. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ 及

$$a_{n+1} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2a_n + 2} \quad (n \geq 1).$$

求 a_{2004} 的值。

【解】（黃嵩茗同學／中道中學高二愛班）

$$\text{令 } k = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ 則 } \begin{cases} k^2 + 3k + 1 = 0, \\ a_{n+1} = \frac{k}{1 + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{k}{1 + a_1} = \frac{k}{1 + 1} = \frac{k}{2},$$

$$a_3 = \frac{k}{1 + a_2} = \frac{k}{1 + \frac{k}{2}} = \frac{2k}{k + 2},$$

$$a_4 = \frac{k}{1 + a_3} = \frac{k}{1 + \frac{2k}{k + 2}} = \frac{k(k + 2)}{3k + 2} = \frac{-k - 1}{3k + 2},$$

$$a_5 = \frac{k}{1 + a_4} = \frac{k}{1 + \frac{-k - 1}{3k + 2}} = \frac{k(3k + 2)}{2k + 1} = \frac{-7k - 3}{2k + 1},$$

$$a_6 = \frac{k}{1 + a_5} = \frac{k}{1 - \frac{(7k + 3)}{(2k + 1)}} = \frac{k(2k + 1)}{-(5k + 2)} = \frac{-5k - 2}{-5k - 2} = 1,$$

故每 5 個即一循環，

$$\text{故 } a_{2004} = a_4 = \frac{-k - 1}{3k + 2} = \frac{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1}{-9 - 3\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{10}. \quad \square$$

11-3. 求所有讓

$$n^3 - n - 987$$

為質數的正整數 n 。

【解一】（陳基正老師／善化高中）

$$\because 987 = 3 \times 7 \times 47,$$

考慮 $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$ 的整數。

$$(1) n = 3k \Rightarrow n^3 - n - 987 = 3(9k^3 - k - 329) \text{ 為質數，}$$

$$\text{則 } 9k^3 - k - 329 = 1 \Rightarrow k \text{ 無整數解。}$$

$$(2) n = 3k + 1$$

$$\Rightarrow n^3 - n - 987 = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k - 329) \text{ 為質數，}$$

$$\text{則 } 9k^3 + 9k^2 + 2k - 329 = 1$$

$$\Rightarrow (k - 3)(9k^2 + 36k + 110) = 0,$$

$$\therefore k = 3, \text{ 得 } n = 10$$

$$(3) n = 3k + 2$$

$$\Rightarrow n^3 - n - 987 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k - 329) \text{ 為質數，}$$

$$\text{則 } 9k^3 + 18k^2 + 11k - 329 = 1 \Rightarrow k \text{ 無整數解。}$$

由(1)(2)(3)得 $n = 10$. $\square$

【解二】

$$n^3 - n - 987 = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) - 987 \cdots (1)$$

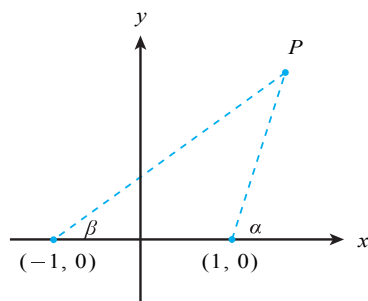
令 $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 6m$ ($\because$ 連續三正整數乘積) 代入(1), $6m - 987 = 3 \cdot (2m - 329)$ 為質數，

$$\therefore 2m - 329 = 1 \Rightarrow m = 165,$$

$$(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 6m = 6 \times 165 = 9 \times 10 \times 11,$$

得 $n = 10$. $\square$

11-4. 如下圖所示



P 點與 $(1, 0), (-1, 0)$ 的夾角為 α, β 。

若 $\alpha + \beta = 90^\circ$ ，則 P 點的軌跡為何種曲線？

【解一】（蘇啟天老師／三民高中）

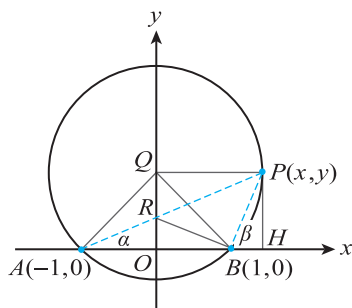
設 $A(-1, 0), B(1, 0), P(x, y)$,

直線 AP 交 y 軸於 R ，連接 B, P ,

則 $\alpha = \angle ABR \Rightarrow \alpha + \beta = \angle ABR + \beta = 90^\circ = \angle RBP$,

$\therefore |\overline{AR}| : |\overline{AP}| = 1 : (x + 1)$ (在 x 軸上正射影長比)，

$$\therefore \overline{AR} = \frac{1}{x + 1} \overline{AP} = \left(1, \frac{y}{1 + x}\right),$$



$$\therefore \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AO} = \left(0, \frac{y}{x+1}\right), \text{ 即 } R\left(0, \frac{y}{x+1}\right),$$

$$\text{由於 } \angle RBP = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BR}^2 + \overrightarrow{BP}^2 = \overrightarrow{PR}^2,$$

$$\begin{aligned} \therefore (0-1)^2 + \left(\frac{y}{x+1} - 0\right)^2 + (x-1)^2 + (y-0)^2 \\ = (0-x)^2 + \left(\frac{y}{x+1} - y\right)^2, \\ \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 - \frac{2y^2}{x+1} + y^2 \\ \Rightarrow \frac{2y^2}{x+1} = 2(x-1) \Rightarrow x^2 - y^2 = 1, \end{aligned}$$

故 P 點軌跡為雙曲線。

【解二】

設 $A(-1, 0), B(1, 0), P(x, y)$,

$$\because \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha \tan \beta = 1,$$

若 P 在第一、四象限，作 $\overline{PH} \perp x$ 軸，

$$\text{則 } \tan \alpha = \frac{|y|}{x+1}, \tan \beta = \frac{|y|}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{|y|}{x+1} \cdot \frac{|y|}{x-1} = 1 = \frac{y^2}{x^2-1} \Rightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

若 P 在第二、三象限可得到相同結果，

故 P 點軌跡為雙曲線。

【解三】

討論 P 在第一象限，在其他象限可推得到相同結果。

設 $A(-1, 0), B(1, 0)$ ，直線 AP 交 y 軸於 R ，連接 B, R

且 $\overline{PQ} \perp y$ 軸，則 $\alpha = \angle ABP \Rightarrow \alpha + \beta = \angle ABR + \beta = 90^\circ$

$= \angle RBP = \angle PQR$ ，即 B, R, Q, P 四點共圓

$\Rightarrow \angle QPR = \angle QBR$ （對同弧圓周角），

$$\angle QPR = \angle QBR = \angle QAR \quad (\triangle QBR \cong \triangle QAR)$$

$$\Rightarrow \overline{QA} = \overline{PQ}.$$

$$\text{令 } \angle QAO = \theta \Rightarrow \overline{QA} = \overline{QP} = \sec \theta, \overline{QO} = \tan \theta,$$

$$\text{即 } P(\sec \theta, \tan \theta) \Rightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

故 P 點軌跡為雙曲線。

11-5. 在以原點 $O = (0, 0, 0)$ 為球心，半徑為 1 的單位球上取一點 $A = (a_1, a_2, a_3)$ 。點 A 所對應的另一個點 $B = (a_3, a_1, a_2)$ 也在這單位球上。求 $\angle AOB$ 的最大值與最小值。

【解】（張進安老師／高雄市立中正高中）

設 $O = (0, 0, 0), A = (a_1, a_2, a_3), B = (a_3, a_1, a_2),$

$C = (a_2, a_3, a_1)$ ，則 A, B, C 三點都在球面上

($\because a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$)。且

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 a_3 + a_2 a_1 + a_3 a_2$$

$$= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\angle AOB)$$

$$= \cos(\angle AOB),$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = a_3 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_1 = \cos(\angle COB),$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = a_2 a_1 + a_3 a_2 + a_1 a_3 = \cos(\angle COA),$$

$$\therefore \cos(\angle AOB) = \cos(\angle BOC) = \cos(\angle COA),$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COA, \text{ 則 } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA},$$

$\therefore A, B, C$ 三點在球面上分

布成正三角形，如右圖，

$\therefore \angle AOB$ 的最小值出現在

ABC 共點時，即 (a, a, a) ，

$$\text{則 } a^2 + a^2 + a^2 = 1,$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\angle AOB$ 的最大值出現在 A, B, C 三點恰在球的大圓上，

即 $A-B-C-O$ 共平面，如下圖，

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ.$$

$$\text{例如 } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 可為一解，}$$

$$\text{則 } \cos(\angle AOB) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ.$$

附註：此題若以柯西不等式解出 $(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2 \leq$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2, \text{ 則 } (a_1 a_3 + a_2 a_1 + a_3 a_2)^2 \leq 1,$$

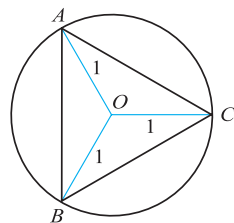
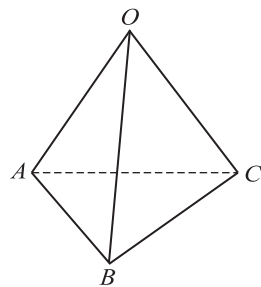
$$\text{則 } -1 \leq a_1 a_3 + a_2 a_1 + a_3 a_2 \leq 1,$$

可解出 $\angle AOB$ 最小值為 0 。

但若 $a_1 a_3 + a_2 a_1 + a_3 a_2 = -1$ ，

$$\text{則 } a_1 = -a_3, a_3 = -a_2, a_2 = -a_1,$$

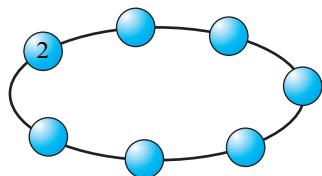
三者不能同時成立， $\therefore \angle AOB$ 之最大值並非 180° 。



問題集XII

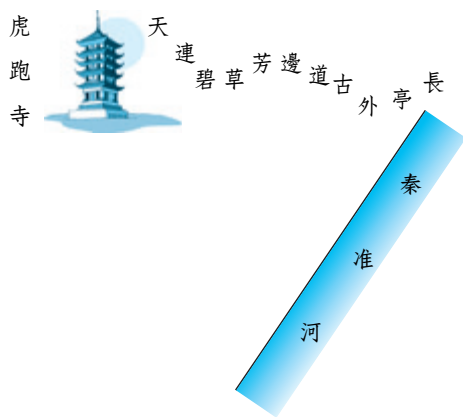
◎許志農／國立台灣師範大學數學系

12-1. 奧修的念珠是由七顆精選的寶石串起來的，其中標示 2 的那顆寶石的重量為 2 克拉。



為了某種目的，這串念珠每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的幾何平均數。試求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

12-2. 如下圖所示，秦淮河遠處有一座虎跑寺。每年六月，附近即將畢業的小學生都會聚集在秦淮河左岸岸邊，準備參加游泳渡秦淮河比賽。當聽到虎跑寺樓頂響起〈驪歌〉「長亭外，古道邊，芳草碧連天，…」時，方可跳入河裡，游向對岸。最先抵達對岸者獲勝。



如果附近的河岸筆直，且寬度一樣，那麼在秦淮河左岸的哪個點準備跳河游向對岸最有利。（請以高中學過的一個重要幾何定理來詮釋選定的點）

12-3. 將

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

這十三個數字分成三群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

12-4. 有某一個含有 n 個整數的集合，具下述性質：任何 $n-1$ 個整數的積與其餘那一個整數的差可被 n 整除。試證：此 n 個整數的平方和可被 n 整數。

12-5. 一位父親臨終前就遺產分配給兒子的方式留下遺囑：第一個兒子分得 100 萬元與剩下遺產的十分之一；第二個兒子分得 200 萬元與剩下遺產的十分之一；第三個兒子分得 300 萬元與剩下遺產的十分之一；…；以此類推，所有的兒子分得的錢數正好相等。

請問：這位父親共有多少遺產？每人分得多少錢？

（徵答截稿日期：94 年 11 月 10 日）