

編輯室報告

迎接新時代的來臨

本期《數學新天地》由師大數學系許志農教授策劃，我們特別規劃了全國高中師生所矚目的 95 暫行綱要當作特別企劃，另有〈誰怕坐標平移旋轉？〉、〈數學模擬軟體「圖形的平移與伸縮」簡介〉……等多篇值得分享的文章。

不同的思考點就會有不同的解題方法，感受也就不同。本期謝銘峰老師在看過第 8 期吳健生老師分享的〈四兩撥千金〉後，也感同身受的在〈也是四兩撥千金〉一文中，分享了兩個「期望值」課程中有趣的問題。

95 年高中數學課程暫行綱要的實施，包括時數變革、教材差異與學生具備的知識能力等，對每一位高中數學教師而言，都必須預作因應及準備。本期除提供 95 年高中數學必修及選修課程的暫行綱要外，另曾政清老師在〈從 95 學年度高中數學課程暫行綱要談起〉一文中，也提供一些參考資訊與建議供大家一同探討。

目前教科書在處理二次曲線標準化的方法上，普遍讓高中生充滿無力感。同學知其然不知其所以然地進行操作，雖能夠算出答案，然心中總是不夠踏實，就算能掌握基礎理論，但遇到拋物線複雜的運算時，他們可能沒有耐心或信心得到最後的結果。有沒有能讓高中生自然接受處理二次曲線標準化的方法呢？這就是曾憲錠老師在〈誰怕坐標平移旋轉？〉一文中所要分享的主題。

上期陳子軒老師在〈高效能學習法〉一文中，提供數種記憶訓練方法，讓老師能引導學生更快、更有效率的學習。本期〈高效能學習法之二〉中，陳子軒老師將另舉出數種方法，幫助學生消除排斥感、找出學習上的問題，並建立學習信心。

在教學工作上，如何讓學生能「看見」一個數學式子的意義是非常困難的，若能藉由幾何圖解，往往比較能讓學生容易感受。而 Maor 在《毛起來說三角》這本書中的現身說法，無疑地為學習者開啟一條努力的道路。〈多采多姿的三角天地〉一文中，蘇俊鴻老師將為大家推薦《毛起來說三角》這本好書。

教育部為推動資訊科技融入教學，積極協助有意願、有潛力的高中職學校發展為「資訊種子學校」。在數學領域方面，93 年度唯一通過教育部審核為種子學校者，就是屏東縣潮州高中。〈數學模擬軟體「圖形的平移與伸縮」簡介〉一文，特別邀請潮州高中專業老師們為大家介紹這套軟體的操作簡介與使用建議，其中，也包含了潮州高中的實施成果與評鑑。



發行人：李枝昌

編輯顧問：許志農

總編輯：吳淑芬

副總編輯：孫慧璟

責任編輯：丁貽羚

美術編輯：蔡雅貞

排版編輯：王麗惠

發行所：龍騰文化事業股份有限公司

地址：248 台北縣五股鄉五權七路 1 號

電話：(02)2299-9063

傳真：(02)2299-0197

創刊日：2002/10/1

出刊日：2004/12/1

網址：<http://www.lungteng.com.tw>

目次

CONTENTS

迴響	也是四兩撥千金 ▶▶ 謝銘峰／彰化高中	3
特別企劃	普通高級中學必修科目「數學」課程綱要 ▶▶ 教育部中教司	5
	普通高級中學選修科目「數學(I)」課程綱要 ▶▶ 教育部中教司	9
	普通高級中學選修科目「數學(II)」課程綱要 ▶▶ 教育部中教司	11
	後期中等教育共同核心課程「數學」課程指引 ▶▶ 教育部中教司	13
	從 95 學年度高中數學課程暫行綱要談起 ▶▶ 曾政清／建國中學	15
	誰怕坐標平移旋轉？ ▶▶ 曾憲錠／竹北高中	20
妙錦囊	高效能學習法之二 ▶▶ 陳子軒／大直高中	28
耕讀園	多采多姿的三角天地 ▶▶ 蘇俊鴻／北一女中	33
夫子 e 教學	數學模擬軟體「圖形的平移與伸縮」簡介 ▶▶ 洪育祥、洪麗婷、徐萬星、戴賢文／潮州高中	35
著作權小百科	課堂著作權 ▶▶ 朱碧華	42
問題集	問題IX 參考解答 ▶▶ 張進安老師／高雄中正高中 ▶▶ 林翠峯老師／桃園高中 ▶▶ 陳佳煌老師／台中一中 ▶▶ 林志漢老師／台北私立大同高中 ▶▶ 郭儒鍾老師／桃園高中 ▶▶ 胡照南老師／台南高商	43
	問題集 X ▶▶ 許志農／臺灣師範大學數學	48



也是四兩撥千金

解題的最高原則是舒服

◎謝銘峰／彰化高中

看過新天地第八期中吳健生老師的文章，令人身有同感，特別是剛剛與同學分享過該篇問題一的類題：

當甲乙等 9 人圍一圓桌而坐時，甲乙兩人相鄰的機率為何？

我總希望同學們能直觀的看這一個問題，而不要一看到題目就開始計算。於是，請同學在紙上先畫出甲與 8 個位置來，發現其中只有兩個位置是在甲的旁邊，因此，答案當然是： $\frac{2}{8}$ 。雖然，並不一定這樣想就是最好，但是，除了正規的算法外，有點感覺的解題方式不是更棒嗎？有趣的是：和音樂班的同學（他們是比較熱愛音樂的）分享過這一題後，碰到如甲乙等 12 人平分 4, 4, 4 人三組時，問甲乙兩人同一組的機率為何之問題時，有人很快的就發現是 $\frac{3}{11}$ ，阿哈！就是吳老師的四兩撥千金¹，雖然，他們的數學能力不見得高明，但是，是很有感覺的。

期望值的課程裡，也有兩個有趣的四兩撥千金的問題，以下，和大家一起分享。

【問題一】 甲乙二人輪流投擲二粒公正骰子，約定先擲得點數和為 7 者可以獲得 100 元，若由甲先擲，則兩人的期望值各為多少？

方法 1：（這是大部分書的寫法）

根據期望值的定義，甲的期望值為

$$E = \frac{1}{6} \times 100 + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times 100 + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times 100 + \dots,$$

是一個無窮等比級數，公比是 $(\frac{5}{6})^2$ ，

因此，

$$E = \frac{\frac{1}{6} \times 100}{1 - (\frac{5}{6})^2} = \frac{600}{11} \text{ (元)}。$$

同理可得乙之期望值為 $\frac{500}{11}$ 元。 □

方法 2：

甲丟一次就獲勝的機率為 $\frac{1}{6}$ ，乙丟一次就獲勝的機率為 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ （因為甲必須沒有丟出 7 乙才有機會），因此，甲乙的勝率比為 6：5。

因此，甲的期望值是 $100 \times \frac{6}{6+5}$ 元，乙則是 $100 \times \frac{5}{11}$ 元。 □

方法 2 中為何可以只計算丟一次的勝率比呢？因為，如果第一次未分出勝負，那等於重新開始，甲和乙的勝負關係並沒有改變，由於勝負之總機率為 1，因此，甲勝的機率為 $\frac{6}{6+5} = \frac{6}{11}$ ，乙自然就是 $\frac{5}{11}$ 囉！

1. 發現今年的指考數學乙選填題 3 恰好也是類題，剛好派上用場。

換個想法，自然有不同的感覺、不同的計算方式。雖然不一定適合每一個人，但是，應該是很有趣的。

【問題二】甲擲二枚公正的硬幣，若擲出兩正面時，可得 10 元，並可繼續再投擲，若第二回又擲出兩正面時，則又可得 10 元，並可繼續再投擲，如此規則反覆進行，則此人所得之期望值為何？

您不妨先自行做做看，暫時不要看下面的說明。

方法 1：

根據期望值的定義：

$$E = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 20 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 30 + \dots,$$

這是一個無窮級數，但是不是等比級數，

因此，我們將等式的兩邊乘以 $\frac{1}{4}$ ，變成

$$\frac{1}{4} \times E = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 20 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 30 + \dots$$

將兩式相減，得到：

$$\frac{3}{4} \times E = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 10 + \dots,$$

終於是一個等比級數，

因此，

$$\frac{3}{4} E = \frac{\frac{3}{16} \times 10}{1 - \frac{1}{4}},$$

即 $E = \frac{10}{3}$ (元)。

方法 2：

稍微跳脫原先的期望值定義，變成：

$$E = \frac{1}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 10 + \dots,$$

耶！怎會這樣，說明一下：

甲有 $\frac{1}{4}$ 的機會可以拿到 10 元，若再丟出兩正面，

即 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ 的機會可以「再」拿到 10 元，以此類推，於是， E 是一個無窮等比級數，

$$E = \frac{\frac{1}{4} \times 10}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{10}{3} \text{ (元)}。$$

方法 3：

甲有 $\frac{1}{4}$ 的機會可以得到 10 元和「再來一次」的機會，因此，

$$E = \frac{1}{4} (10 + E),$$

於是 $E = \frac{10}{3}$ (元)。

哇！你一定要求暫停一下，怎麼回事？再仔細看一下，甲有 $\frac{1}{4}$ 的機會可以得到 10 元和「再來一次」的機會，那個再來一次，不就是 E 嗎？這樣是不是四兩撥千金了呢？

如果使用方法 1，你的數學技巧一定很高，大部分的書都這樣寫，沒什麼不好，還順便複習了一下無窮級數的求法，利用方法 2，將期望值的想法做點改變，計算變簡單了，自然是一個很不錯的做法，如果你還可以想出方法 3，那種阿哈的感覺，令人心曠神怡。

不同的解題方法，不僅僅在於計算速度上的不同，理解的方向也有所不同，數學之美妙，就在於總有舒服曼妙的想法，也無怪乎有數學家說：「不美的不是數學」，而筆者的感覺是：「解題的最高原則是舒服」。您呢？對每一個問題的解法都覺得舒服了嗎？若不然，一定有更美妙的方法在等著您發覺喔！



普通高級中學必修科目「數學」課程綱要

◎教育部中教司

壹、目標

普通高級中學必修科目「數學」課程欲達成之目標如下：

- 一、引導學生瞭解數學的內容，意義及方法。
- 二、培養學生以數學思考問題，分析問題，解決問題的能力。
- 三、提供學生在實際生活和學習相關學科方面所需的數學知能。
- 四、培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

貳、時間分配

第一、二學年每學期四學分，每週授課四節。

參、教材綱要

普通高級中學必修科目「數學」課程十六學分。

第一學年

主題	主要內容	說明
一、 數與坐標系	1. 整數 2. 有理數與實數 3. 平面坐標系* 4. 複數與複數平面	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。 2-1 介紹無理數如 $\sqrt{n}$ 和 π ，其中 n 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。 2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 n, m 為正整數。 3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。 4-1 介紹 i 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於0之情形。 4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。

二、 數列與級數	1. 等差級數與等比級數 2. 無窮等比級數與循環小數 3. 數學歸納法*	1-1 含數列與級數的基本概念。 2-1 介紹最基本的極限概念。 3-1 介紹數學歸納法並應用於證明。
三、 * 多項式	1. 多項式的四則運算 2. 餘式定理、因式定理 3. 最高公因式與最低公倍式 4. 多項式函數 5. 多項式方程式 6. 多項式不等式	1-1 含綜合除法。 2-1 含整係數多項式的一次因式檢驗法。 3-1 利用輾轉相除法求最高公因式。 4-1 含一次、二次多項式函數的圖形。 5-1 含代數基本定理的介紹，勘根定理和實係數多項式方程式虛根成對定理。 6-1 瞭解已分解為一次因式乘積的多項式在實數線上恆正、恆負的區間。
附錄	認識證明	以到目前為止學過的數學，介紹如何進行推論與證明。
四、 * 指數與對數	1. 指數 2. 指數函數及其圖形 3. 對數 4. 對數函數及其圖形 5. 查表、內插法	4-1 指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。 5-1 可用電算器求出指數函數與對數函數的值。
五、 * 三角函數的基本概念	1. 銳角三角函數 2. 三角函數的基本關係 3. 簡易測量與三角函數值表 4. 廣義角的三角函數 5. 正弦定理與餘弦定理 6. 基本三角測量	1-1 先處理有一個銳角為 30° ，或 45° 的直角三角形邊角性質。 2-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。 3-1 可用電算器求出三角函數值。
六、 三角函數的性質與應用	1. 三角函數的圖形* 2. 和角公式* 3. 倍角*、半角公式 4. 正餘弦函數之疊合 5. 複數的極式	1-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。 2-1 含積化和差公式。 4-1 以實例說明疊合的意義。 5-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根。
附錄	1. 函數的概念* 2. 餘切函數、正割函數和餘割函數的圖形	以到目前為止學過的數學統整函數的概念。

第二學年

主題	主要內容	說明
一、 向量	1. 有向線段與向量 2. 向量的基本應用* 3. 平面向量的坐標表示法* 4. 平面向量的內積*	1-1 含向量的加法、減法、係數積與內積等運算。 2-1 含向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。 3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算以及分點坐標、直線的參數式。 4-1 含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、點到直線的距離。
二、 空間中的直線與平面	1. 空間概念 2. 空間坐標系* 3. 空間向量的坐標表示法 4. 平面方程式 5. 空間直線方程式 6. 一次方程組	1-1 空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。 3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算，柯西不等式，正射影。 4-1 含法向量、平面的夾角、點到平面的距離。 5-1 含直線的參數式、點到直線的距離、平行線的距離、歪斜線的公垂線段長。 6-1 限二元、三元。 6-2 含高斯消去法。 6-3 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式和二階行列式。 6-4 以二階行列式求平面上平行四邊形的面積。
三、 圓、圓與球	1. 圓的方程式* 2. 圓與直線的關係 3. 球面方程式 4. 球面與平面的關係	
四、 圓錐曲線	1. 圓錐曲線名詞的由來 2. 拋物線（標準式） 3. 橢圓（標準式） 4. 雙曲線（標準式） 5. 圓錐曲線的光學性質	4-1 含漸進線。
五、 排列、組合	1. 集合元素的計數 2. 加法原理、乘法原理 3. 排列 4. 組合 5. 二項式定理 6. 遞迴關係	1-1 含排容原理。 5-1 以組合概念導出。 6-1 遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 α, β, γ 為常數， $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式。
六、 機率與統計（I）	1. 事件與集合 2. 機率的性質 3. 數學期望值 4. 統計資料的來源 5. 分析一維數據 6. 信賴區間與信心水準的解讀	1-1 集合簡介。 1-2 樣本空間與事件。 4-1 觀測研究、抽樣調查、實驗。需介紹及使用亂數表，抽樣調查法需含簡單隨機抽樣法。 5-1 圖表編製，數據集中趨勢，數據離散趨勢，整合集中與離散趨勢，以瞭解數據的全貌。 6-1 常態分配及 68-95-99.7 規律。僅需處理二元資料，不必引進機率模型，以教學活動瞭解信賴區間與信心水準的解讀。

註：「*」為「後期中等教育共同核心課程指引」內容。

肆、實施方法

一、教材編寫

- (一) 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接，並注意教材內容應具時代性與前瞻性。
- (二) 教材應以一精緻、完備之出版品呈現。
- (三) 教材應注意到銜接、統整和連結。
- (四) 教材之呈現應循序漸進，引發學習動機，在直觀與嚴謹之間取得平衡，並兼顧從特例到一般推理之必要。
- (五) 習題要扣緊主題，在例題之後應有隨堂練習，在課文之後應有啟發深思的練習。
- (六) 教師手冊要提供教師對教材進一步的認識，對課程深入的瞭解和最有效率的教法。教師手冊亦應提供相關的進階資訊，供教師參考。
- (七) 專有名詞應採用教育部最新編訂公佈的數學名詞。各專有名詞及外國人名應於索引中附原文。
- (八) 機率與統計（I）新增信賴區間與信心水準的解讀一節，其相關的教學活動建議由全班每一位同學各自以亂數表模擬丟銅板的過程，代入銅板正面機率信賴區間的算式 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ 來得到各自所得的信賴區間，並察覺大多數同學所得的信賴區間會涵蓋銅板正面機率的真實值。

二、教學方法

- (一) 應透過各校教學研究會要求行政系統配合，以達成因材施教的目標。
- (二) 教學應具彈性但要掌握教材之核心原理原則，以期流暢清晰。
- (三) 對習題要提示，要要求，要進行討論，以期在方法上不斷深化，精益求精。

三、教具及有關教學設備

- (一) 以電腦協助對函數圖形、立體幾何、解方程式和統計課程之進行。
- (二) 請相關單位經常協助提供各類與教學相關之國內外網址。相關單位如下：
 1. 中華民國數學會。
 2. 中華民國統計學社。
 3. 國科會科教處。
 4. 各師資培育機構。
 5. 國立教育資料館。

四、教學評量

數學學習首重習題。

- (一) 隨堂演習，由學生上台演練，各校應提供演習之時數。
- (二) 家庭作業，經由教師適當的提示，學生課後將習題做好，交回給教師，學校應提供改作業的人力。
- (三) 測驗的方式宜有彈性，但要給予充分的時間思考。測驗的題目應區分為基礎和進階兩類。

普通高級中學選修科目「數學 (I)」課程綱要

◎教育部中教司

壹、目標

普通高級中學選修科目「數學 (I)」課程欲達成之目標如下：

- 一、加深加廣必修課程所學之內容。
- 二、提供學生在大學學習相關學科的基礎知能。

貳、時間分配

第三學年擇一學期三學分，每週授課三節。

參、教材綱要

主題	主要內容	說	明
一、 機率與統計 (II)	1. 獨立事件、條件機率與貝氏定理 2. 數學期望值與二項分配 3. 交叉分析 4. 分析二維數據	2-1 需與信賴區間與信心水準的解讀結合。 3-1 僅談兩個變數的情況，需與條件機率相結合。 4-1 散佈圖、相關係數、迴歸直線與最小平方法。	
二、 矩陣	1. 矩陣的加法與係數積 2. 矩陣的乘法及意義 3. 矩陣的列運算及增廣矩陣的應用 4. 行列式 5. 克拉瑪公式 6. 反方陣	1-1 強調矩陣的意義，多用實例說明。 2-1 含乘法的代數性質，轉移矩陣 (transition matrix) 多用實例說明。 4-1 限二階與三階，含行列式的基本性質及用行列式表示面積與體積。 5-1 限二元，三元。 6-1 含以列運算求反方陣及二階反方陣之行列式求法。 6-2 以二階反方陣之行列式求法解釋克拉瑪公式。	

三、不等式	1. 絕對不等式（證明不等式）	1-1 柯西不等式、算幾不等式、應用實例。
	2. 條件不等式（解不等式）	2-1 以分解因式解一元多項式不等式並在數線上標示解區間。 2-2 解二元一次多項式不等式並在坐標平面上標示解區域。 2-3 利用代數方法、幾何方法（圖形），以及絕對不等式求函數在限制條件下的極大、極小。求極值的函數以低次多項式為主。
	3. 線性規劃	3-1 只限二元。

肆、實施方法

一、教材編寫

- (一) 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接，並注意教材內容應具時代性與前瞻性。
- (二) 二項分配建議以投擲一公平銅板 20 次，落於 6 次至 14 次（含）的機率約為 0.9586，落於 5 到 15 次之間（含）的機率約為 0.9882，數學期望值為 10 次，標準差約為 2.236 次，來連結信賴區間與信心水準的概念。
- (三) 矩陣：
 - 1. 應與一次方程組密切聯繫。
 - 2. 乘法的意義要以實例說明。
- (四) 絕對不等式要與其他問題連結，並且說明在應用時該不等式不可或缺的角色。
- (五) 條件不等式要連結到線性規劃。

二、教學方法

選修（I）課程學習目標之一在要求學生對高一、高二所學加深加廣，所以教師應將相關的議題深化、延伸和統整，以期使學生能掌握學習數學精益求精、以簡馭繁之精神。

三、教具及有關教學設備

- (一) 以電腦畫圖軟體，協助學生從動態中瞭解線性規劃的意義及方法。
- (二) 以各種平面及立體模型，協助學生建立幾何的直觀。

四、教學評量

- (一) 課後作業，報告及隨堂演習。
- (二) 測驗及作業要常常回歸高一、高二所學之相關部分。

普通高級中學選修科目「數學(Ⅱ)」課程綱要

◎教育部中教司

壹、目標

普通高級中學選修科目「數學(Ⅱ)」課程欲達成之目標如下：

- 一、以多項式函數為主體引導學生瞭解微積分學的內容，意義及方法。
- 二、提供學生在大學學習相關學科的基礎知能。

貳、時間分配

第三學年擇一學期三學分，每週授課三節。

參、教材綱要

主題	主要內容	說	明
一、 多項式函數的極限與導數	1. 函數及其圖形 2. 極限概念 3. 割線與切線 4. 導數與切線的斜率	1-1 複習一次函數與直線方程式。 1-2 複習二次函數與拋物線方程式。 2-1 引入 Δx 並以直觀說明極限的意義。 3-1 引入 Δy 及 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 討論函數割線的斜率，並說明在運動學上的意義。 3-2 以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率。 3-3 複習拋物線的光學性質。 4-1 定義導數及切線方程式。 4-2 說明導數在運動學上的意義。 4-3 以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介	
二、 導函數的應用	1. 函數圖形的描繪 2. 函數的極值 3. 三次函數的圖形 4. 極值的應用	1-1 函數圖形的遞增、遞減和臨界點。 1-2 函數圖形的凹性和反曲點。 2-1 函數極值的一階二階檢定。 3-1 含對三次多項式實根個數的瞭解。	

三、 多項式 函數的 積分	1. 黎曼和與面積 2. 求多項式函數圖形與直線 $x = a$ ， $x = b$ ，和 $y = 0$ 圍出的面積 3. 定積分及其應用	1-1 直觀說明黎曼和對一再細分的分割所取的極限是面積。 1-2 在等分割時，對 $y = x^2$ 求出黎曼和的極限。 2-1 介紹定積分符號，反導函數（反微分）符號。 3-1 以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主。
附錄一	微積分基本定理	
附錄二	以牛頓法求整數開平方根的近似值。	

肆、實施方法

一、教材編寫

- (一) 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接，並注意教材內容應具時代性與前瞻性。
- (二) 教材之編寫應以多項式為主體，呈現微積分學的核心思想。
- (三) 教材之編寫應清楚說明從割線到切線，從直方圖到面積的過程中極限概念所扮演的角色。
- (四) 教材之編寫應在附錄中清楚交代微積分基本定理如何內在連結微分和積分的概念。
- (五) 教材之編寫應盡量提供適當範例，以彰顯微積分方法之重要性。

二、教學方法

- (一) 說明影響微積分學發展之要素，舉其大者如
 1. 對非等速運動之探討。
 2. 對曲線切線和法線之探討。
 3. 極值問題。
 4. 對區域面積、體積之探討。
- (二) 掌握極限概念之樞紐地位，以直觀方式處理。
- (三) 應統整多項式在高一、高二數學學習中扮演的角色，舉其大者如
 1. 代數運算。
 2. 自由落體及拋物線。
 3. 多項式的根。
 4. 多項式函數的圖形。

三、教具及有關教學設備

- (一) 應利用電腦畫圖軟體增加學生對函數變化、平面圖形、立體圖形的掌握。
- (二) 應利用電腦計算軟體實際展現求極限的過程。

四、教學評量

- (一) 儘量安排隨堂演習，讓學生在課堂上進行解題及討論。
- (二) 課後作業應包括習題、書面報告、口頭報告。
- (三) 定期測驗以理解學生對所學之掌握。

後期中等教育共同核心課程「數學」課程指引

◎教育部中教司

壹、目標

後期中等教育共同核心課程「數學」欲達成之目標如下：

- 一、提昇基本數學能力。
- 二、奠定修習微積分與線性代數之基本能力。
- 三、培養基礎統計能力。

貳、教材綱要

後期中等教育共同核心課程「數學」八學分。

主題	主要內容	說明
一、多項式	1. 多項式的四則運算 2. 餘式定理、因式定理 3. 方程式的解法	1-1 含綜合除法。 3-1 含一元二次方程式的公式解，及以判別式討論根的性質。
二、直角坐標系	1. 數線 2. 平面坐標 3. 函數的概念和函數圖形 4. 空間坐標	2-1 含距離公式、圓的標準式、分點坐標。 3-1 含一次、二次多項式的圖形。 4-1 含距離公式、分點坐標。
三、平面上的直線方程式	1. 直線的斜率 2. 直線方程式 3. 二元一次方程式的圖形 4. 點與直線的關係	3-1 含二元一次聯立方程式求解各種情形的討論。

四、指數與對數	1. 指數 2. 指數函數及其圖形 3. 對數 4. 對數函數及其圖形 5. 常用對數	
五、三角函數	1. 銳角三角函數 2. 三角函數的定義及其基本關係 3. 簡易測量與三角函數值表 4. 廣義角的三角函數 5. 三角函數的圖形 6. 和角公式、倍角公式	1-1 先處理有一個銳角為 30° ，或 45° 的直角三角形邊角性質。 5-1 含弧度。圖形只談正弦、餘弦和正切。
六、排列組合	1. 乘法原理 2. 排列 3. 組合 4. 二項式定理	
七、機率	1. 事件與集合 2. 機率的性質 3. 數學期望值 4. 獨立事件	1-1 集合簡介。 1-2 樣本空間與事件。
八、統計	1. 複習國中介紹過的統計概念與名詞 2. 標準差 3. 信賴區間與信心水準的解讀	1-1 含抽樣、資料整理、圖表編製。 1-2 含算數平均數、中位數、眾數與百分等級（PR）。 3-1 以媒體報導的實例介紹信賴區間與信心水準。
	附錄：認識證明	以到目前為止學過的數學，介紹如何進行推論與證明。含以實例說明數學歸納法。

從95學年度高中數學課程暫行綱要談起

◎曾政清／建國高中

壹、高中數學課程點線面

課程是實現學校教育目標的基本途徑，近幾年來風起雲湧的教育改革，無論是官方或民間都對中等教育階段產生的問題，紛紛提出新的變革，如「多元入學方案」、「廣設高中」、「實施綜合中學」……等。希望能在學校轉型上走向多元（如普通高中、完全中學、綜合高中），以適應學生不同的需求；在教育功能上則突破「升學預備」而同時強調「統整（integration）」和「完成（terminal）」的適性教育。此外中等教育也必須掌握教育機會均等的正義原則，因應城鄉均衡的需求，配合社區特性的發展。這些諸多的教育理念甚至是教育理想，無不冀望 95 學年度高中課程暫行綱要的變革以作因應手段。

特別是由於九年一貫課程已於九十學年度起陸續實施，為因應國中畢業生將來進入高級中學學校之後，課程上的銜接轉為順暢，因此高級中學課程大綱的修訂乃勢在必行。然而學校類型的多樣化，功能的擴充以及社區化的發展下，勢必藉由共同的核心課程來加以統整做為主軸，特別是要提昇高中生的學習與競爭能力，課程的總體規劃與設計更是扮演非常關鍵的角色。

而隨著社會多元化的腳步，高中數學課程的發展由早期的統編本到近幾年採一綱多本，課程內容較強調生活化與未來延伸學習需求，特別是

高中生無論進入普通大學或技術學院，就所需要的數學教育而言，大學相關科系（包括理、工、醫（藥）、農、管理、公衛、商學、社會（經濟））應修習微積分與線性代數。因此高中核心課程的訂定至少要為修習微積分和線性代數提供前置的經驗。而就國民的基本素養而言，統計能力的培養也是要點之一。九年一貫在國中、小的數學課程中已經規定了相當份量的統計課程。在高中職共同核心課程的部分，應該要納入統計和與統計息息相關的機率課程。尤其數學為科學之母，是國家競爭力的基石，而全民數學素養的提昇，更是社會理性發展的原動力。因此，參考過去各級教育的實施目標及社會需求，並考量國際競爭力等因素，將教科書定位為教師教學、學生自習及家長輔助學習的主要依據，應是數學課程重要的指導原則。

在進入二十一世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。基於以上的認知，數學課程的目標，要能反映出四大需求：

- (一) 數學能力是國民素質的一個重要指標；
- (二) 了解數學是人類重要資產；
- (三) 教學（含教材、課本及教學法）應配合學生不同階段的需求，協助學生數學智能的發展；
- (四) 數學作為基礎科學的工具性特質。

此外建造一個開放且豐富的數學資訊網路，包括大量的題庫、進階數學讀物、教師專業期刊、數學教學資源平台、教學研究資料的透明化等。藉由各種資訊網路，讓教師能擁有豐富的參考資料，並與其他教師分享教學經驗；家長能有足夠的資訊來輔助子女學習，及學生能據以自學。我們認為現階段教學體制所提供的教學品質仍有很大的改進空間，及建立豐富且多元發展方向的流通資訊。

對於高中數學課程的規劃，教科書呈現的方式和教學方法均相當重要。特別是近幾年配合九

年一貫課程的實施，關於能力指標、課程規劃與課本編排均強調合理性。課程、教學、教科書（包括教科書的文字）都是學生學習環境的一環，合理審慎地處理這些環節，將能讓學生專注於學習，減少學生失誤的挫折，提昇學生的學習興趣。這三者的視野，都必須涵蓋在整體數學課程大綱中。二十年來，台灣地區高中數學課程綱要內容與時數經歷三次變革，也對高中數學教學與大學入學考試產生重要且深遠的影響，底下介紹這三次課程時數的主要變革。

貳、數學課程時數的變革

學年	教材	72 年版	84 年版 (註一)	93 年版 (註二)	備註
第一學年	數學	5 節	5(4)節	4 節	
第二學年	數學	5 節	5(4)節	4 節	
	基礎數學演習 (註三)	2 節			演習與統合課程 可擇一選修
	基礎數學統合	2 節			
	幾何學		2 節		部分學校選修 1 節
第三學年	選修一	理科數學 6 節	數學甲 6 節	選修 I 一學期 3 節 + 選修 II 一學期 3 節	選修 I 與選修 II 提供高三不分類 組每學期選修一 科
	選修二	普通數學 (商科數學) 4~6 節	數學乙 4~6 節		

註一：84 年版公佈後於 88 學年度年正式實施時，因正逢週休二日開始，教育部於是將高一及高二數學課程時數各減少 1 節。

註二：93 年度公佈的高中數學課程暫行綱要預計 95 學年度開始實施。

註三：黑體字表選修課程。

參、95 學年度高中數學課程暫行綱要教材內容調整

內容刪除 (88 年版)	1. 第一學年第七章反三角函數的基本概念。 2. 數學甲第二章平面上的坐標變換。 3. 數學甲第三章中的二階方陣所對應的平面變換（包括旋轉、鏡射、伸縮與推移）。 4. 數學甲第一章機率與統計（II）中的變異係數。 5. 數學乙第二章中的指數、對數與簡易三角不等式。 6. 數學乙第五章圖形的伸縮與平移。 7. 數學乙第六章幾何圖形（含正多面體空間圖形、黃金分割）。		
內容新增 (95 年版)	1. 第一學年附錄：認識證明以第一學期前三章學過的數學，介紹如何進行推論與證明，以增進學生邏輯證明與推理能力。 2. 第二學年第六章機率與統計（II）統整分析一維數據：圖表編製，數據集中趨勢，數據離散趨勢，整合集中與離散趨勢，以瞭解數據的全貌。 3. 選修數學（I）第一章機率與統計（II）內容增加信賴區間與信心水準的解讀結合。其相關的教學建議由全班每一位同學各自以亂數表模擬丟銅板的過程，代入銅板正面機率信賴區間的算式 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ 來得到各自所得的信賴區間，並察覺大多數同學所得的信賴區間會涵蓋銅板正面機率的真實值。 4. 選修數學（II）第三章多項式函數的積分。 5. 恢復 72 年版介紹定積分符號，反導函數（反微分）符號及定積分的應用求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主。並在附錄中增加微積分基本定理及以牛頓法求整數開平方根的近似值。		
移至附錄	88 年版		95 年版
	1. 第一學年第一章基礎概念（包括邏輯、集合與函數） 2. 第一學年第六章餘切、正割與餘割圖形部分。 3. 第一學年第三章數列級數中遞迴數列。 4. 第二學年第三章三階克拉瑪公式。 5. 數學甲第一章機率與統計(II)部分條件機率、貝氏定理與獨立事件。 6. 數學甲第三章與數學乙第一章矩陣。 7. 數學甲第四章與數學乙第二章不等式。 8. 數學乙第三章線性規劃。 9. 數學甲第五章及第六章。		1. 第一學年附錄。 2. 第一學年附錄。 3. 第二學年第五章排列組合中的遞迴關係。 4. 選修數學(I)第二章。 5. 選修數學(I)第一章。 6. 選修數學(I)第二章。 7. 選修數學(I)第三章。 8. 選修數學(I)第三章。 9. 選修數學(II)。

肆、95 學年度高中數學課程暫行綱要教材內容與特色

針對此次修訂的主要特色條列說明如下：

1. 高中數學科總節數減少，特別是第三學年課程時數。
2. 打破傳統自然、社會分組方式選修課程，真正落實以選修替代分組，未來指定科目考試將可能只有一種數學考科。
3. 幾何學選修課程全數刪除。整體而言高中幾何課程減少很多，而統計課程除與國中課程內容作適度區隔外，仍保有一定比例與篇幅，並加強與生活實際的應用。
4. 恢復並增加微積分基礎課程的內容。
5. 將一綱多本精神發揮，使教材綱要成為各版本課本最基礎的素材內容。
6. 就整體而言，仍保留 72 年版與 84 年版課程的菁華架構，而僅作微幅的增刪與修訂。
7. 強調高中數學課程承先(九年一貫課程)啟後(大學數學課程的前置經驗)的實際定位。
8. 銜接九年一貫課程，著重生活經驗與實際應用等層面，以解決問題為導向，將資訊能力融入課程中。

伍、心得與感想

教育部於今年六月十五日召開普通高級中學課程發展委員會及總綱小組聯席會議，會中針對四月十九、二十日全國高中教育發展會議通過之普通高級中學課程暫行綱要草案進行討論，經調整修正後通過為普通高級中學課程暫行綱要，預定九十五學年度實施。另外，有關全國高中教育發展會議決議另啟動新課程綱要之修訂工作乙案，亦決議由中教司籌組專案小組，積極著手進行，預定九十八學年度實施。至於後期中等教育共同核心課程指引總綱，則配合普通高級中學課

程暫行綱要之修訂狀況，進行必要之調整與修正。

此次高中數學課程修訂，儘管事前許多第一線高中教師與學者專家不斷呼籲與反應不能再減低高中數學課程的授課時數與課程內容，以免學生的數學關鍵知識與能力欠缺足夠時數進行教學引導與啟發，而對學生未來的生涯學習產生不良的影響。然而普通高級中學數學課程暫行綱要，主要仍以過去二年半以來修訂完成之課程綱要草案為基礎，總時數仍較 72 年及 84 年版修訂時數降低，但內容增刪仍保留過去修訂時主要的學習內容與水平。

近幾年來筆者曾多次參與大考中心大學入學考試數學指定科目試題評析工作，深深覺得試題著重評量學生的閱讀、歸納、邏輯思考與推理能力，其中有一定難度鑑別考生的分析及思考能力，尤其是許多數學乙試題內容結合生活與時事，將數學觀念運用於生活之中，更能測驗鑑別出學生數學能力及解決問題的能力。相對於筆者因緣際會參與 92 年及 93 年國中基測相關試務工作，深切體認國中基本學力測驗強調簡單偏易命題原則，數學科組題原則強調基礎、重要、核心的基本概念，試題取材盡量來自於課本或是學生的生活經驗，貼近真實生活，強調基本運算的使用，特別是排除評量難度艱深與高層知識與專業技能，所有數學試題均以通過率一半為原則，如此不具鑑別度的數學選擇試題，深深牽動國中數學課程教學簡化及強調基本反覆的操作與練習。如此一來為了應付國中基測的學習模式，可能造成許多高能力的學生較無機會及意願鑽研深入的數學問題，數學學習能力與水準因而下降，甚至將嚴重窄化國中生數學學習的認知與能力培養，對目前高中既深且廣的數學課程內容銜接，會造成許多負面的不良影響。

況且九年一貫課程已使國中階段數學課程簡

化，然而高中數學課程內容卻維持過去多年的水準，在承先啟後的高中階段，高中數學教師一方面必須在比以往更低的教學時數下，面對數學學習能力全然不同的學生進行教學，另一方面必須改變現有的教學方式與評量模式，特別是結合資訊融入教學或是設計多元教材教法，在有限的教學時數下盡量充實並引導學生的數學能力，激發數學學習興趣及潛能，以因應大學入學考試數學考科的試煉與培養未來生涯研究所具備的數學專業能力。

95 年高中數學課程暫行綱要實施。對每一位高中數學教師而言必須預作因應及準備，尤其是一路走來，這一群國中小學生面臨「一綱多本」、「教材開放」、「建構式數學」及「九年一貫課程設計」、「國中基測考題難度簡化」等衝擊，高中數學教師們必須多費心針對學校入學學生進行學習檔案與數學學習背景資料分析，以進一步了解學生的先備知識與學習能力及風格，使高中數學課程的教與學能順利進行。

筆者去年一整年參與教育部前瞻委員會九年一貫數學課程暫行綱要修訂工作中，在一群熱心數學教育專家、學者與教授帶領下，與第一線的數學教師眾志成城、通力合作，共同將現行國中小數學課程經過一番密集雙向的溝通與研討，將九年一貫數學課程作重要且明確修正，不但使台灣的中小學數學課程有更多的統整與精進的空間與機會，也因而使筆者有更多省思與成長，並確切體認台灣數學課程研發發展與改革仍深具潛能。

教育決定台灣的未來，你我決定台灣的教育，95 年高中數學課程暫行綱要的公佈，代表另一個教學階段與數學教育改革契機的開始，讓我們一同努力。

徵稿啟事

梭羅（Henry David Thoreau）說過：

「一旦我相信這是種子，我就等著看奇蹟來臨。（*Convince me that you have a seed there. And I am prepared to expect wonders.*）」

《數學新天地》誠摯地邀請您，與我們一起播下數學教育的種子，讓這片園地更加蒼翠、芬芳。

徵稿項目：

- 【妙錦囊】：教材教法的經驗傳承或心得分享。
- 【探索】：碩博士論文或研究報告的精簡版。
- 【耕讀園】：優良圖書的簡介、導讀或評論。
- 【夫子 e 教學】：資訊科技融入教學的嘗試與反省。
- 【風潮】：數學教育新聞的深入探討。
- 【問題集】：各種解題觀點與手法的交流。
- 【迴響】：本刊各文章所引起的觸發或聯想。
- 【其他】：不在以上之列，但與數學教育相關的題材。

來稿提醒：

1. 引用圖文請註明來源出處，以避免著作權糾紛。
2. 本刊會在不損及作者原意下，對稿件進行潤飾；若作者堅持保留原貌，請在稿件上註明。
3. 徵稿字數：來稿請用 A4 格式。【耕讀園】2000 字以內。其餘項目徵稿字數 5000~6000 字（若為 word 格式的電子檔，請勿超過 6 頁；若為手寫稿，請勿超過 18 頁。）
4. 請註明真實姓名、地址、電話、服務機關與職稱（學生請註明就讀班級）。
5. 本刊恕不退稿，請作者預留底稿。
6. 來稿方式：
 - (1) 郵寄：[248] 臺北縣五股鄉五權七路 1 號《數學新天地》收。
 - (2) e-mail：edit709@lungteng.com.tw
 - (3) Fax：02-2299-0197《數學新天地》收。
7. 聯絡電話：02-2299-9063 分機 352 丁貽羚。



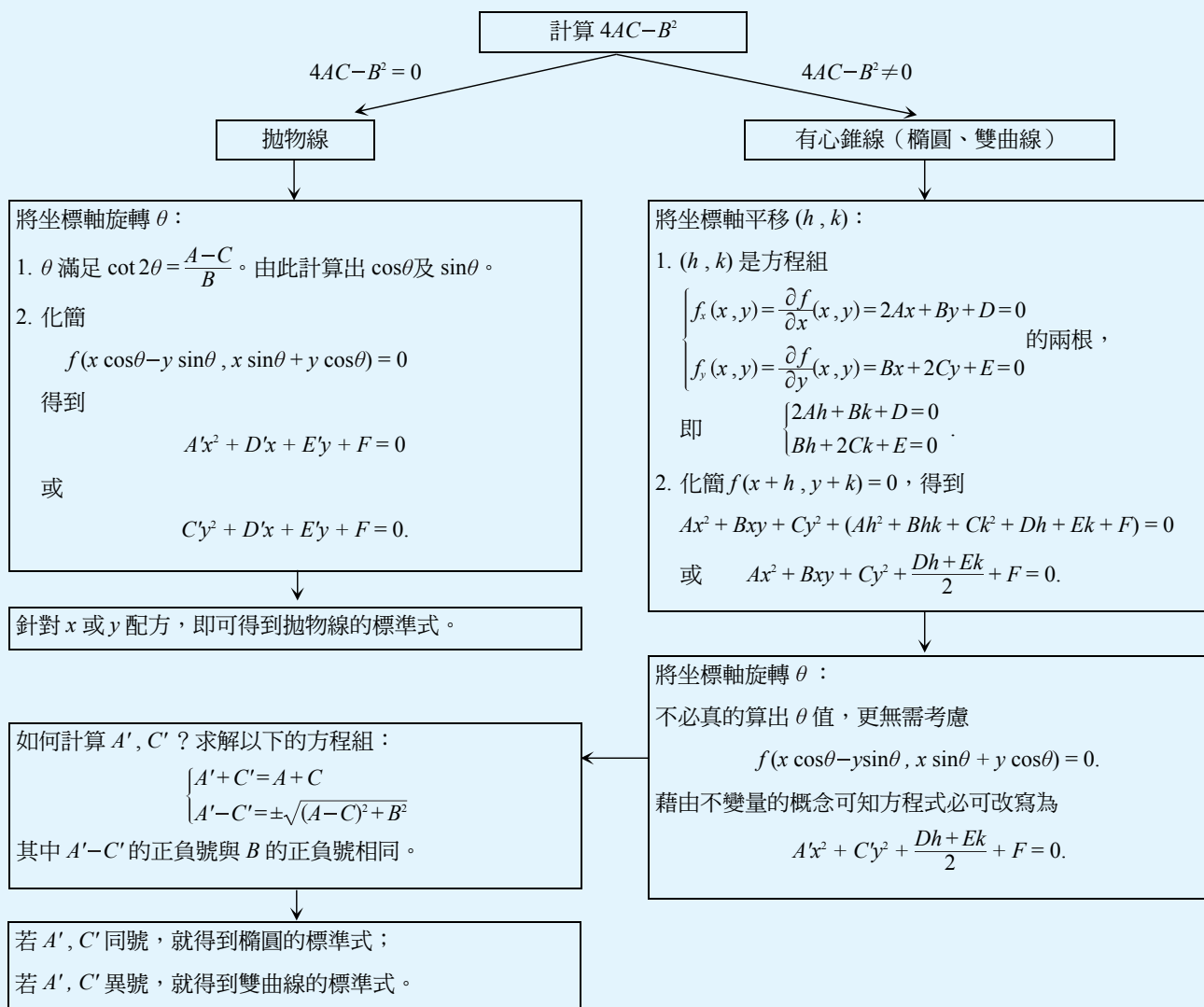
誰怕坐標平移旋轉？

◎曾憲錠／竹北高中

編者按：

基本上，目前的教科書都採用以下的流程圖來處理二次曲線 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的標準化；可惜的是，高中生普遍對於這樣的作法充滿了無力感。有些學生是知其然、不知其所以然地進行操作，雖然能夠算出正確答案，但心中總是不夠踏實。有些學生的困擾屬於另一個層次，他們大致能掌握這套流程的理論基礎，但遭遇拋物線的時候，由於涉及到 $f(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ 的複雜運算，他們可能沒有耐心或信心得到最後的結果。

有沒有別的方法，尤其是高中生能夠自然接受的方法，來處理二次曲線的標準化呢？這就是竹北高中曾憲錠老師在本文所探討的主題，歡迎大家一起欣賞，甚至分享您的看法。



前言

對於學過高二圓錐曲線單元的同學而言，他應該很熟悉 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 是扁的橢圓、 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 是雙曲線（一葉開口朝左，一葉開口朝右）、 $x^2 = 4y$ 是開口向上的拋物線；不但如此，他也應該可以輕鬆地在紙上畫出這些方程式的圖形。

到了高三，如果選修的是數學甲，他將會遭遇到一般化的二元二次方程式 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 。他不但要學會如何判斷它的類別（橢圓、雙曲線、拋物線），還要能夠進一步畫出它的圖形。這當然是數學上已經解決的問題，卻常常引起教學上的困擾。這樣說好了，學生缺少的不是一套呈現完美的數學結果，而是充滿發現樂趣的思維過程。本文是企圖彌補這項缺憾所作的一個嘗試。

預備工作

先看兩個高三同學應該熟悉的經驗：

【例 1】

將 $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 19$ 寫成 $x-2$ 的多項式。

這個問題的動機可能是為了計算 $f(1.99)$ 。不論如何，我們可以連續使用綜合除法如下：

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & -3 & 1 & 1 & 19 & \\
 & 2 & -2 & -2 & -2 & 2 \\
 \hline
 1 & -1 & -1 & -1 & 17 & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 2 & 6 & 2 & 2 & \\
 \hline
 1 & 3 & 7 & 2 & 2 & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
 \hline
 1 & 1 & 5 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

因此，

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 19 \\
 &= (x-2)^4 + 5(x-2)^3 + 7(x-2)^2 + (x-2) + 17. \quad \square
 \end{aligned}$$

【例 2】

將拋物線 $y^2 - 4x + 2y + 13 = 0$ 寫成標準式。

對 y 配方，得到

$$\begin{aligned}
 y^2 + 2y + 1 - 4x + 13 &= (y+1)^2 - 4x + 12 = 0 \\
 \Leftrightarrow (y+1)^2 &= 4(x-3)
 \end{aligned}$$

令 $\bar{y} = y+1$, $\bar{x} = x-3$ ，則原方程式變成

$$\bar{y}^2 = 4\bar{x}.$$

引入 $\bar{x}, \bar{y}$ 相當於平移坐標軸，事實上，新的 $\bar{x}$ 軸為 $\bar{y} = 0$ ，也就是舊坐標系統下的 $y+1=0$ 。而新的 $\bar{y}$ 軸為 $\bar{x} = 0$ ，也就是舊坐標系統下的 $x-3=0$ 。

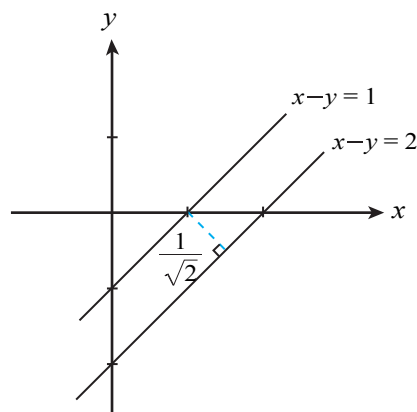
□

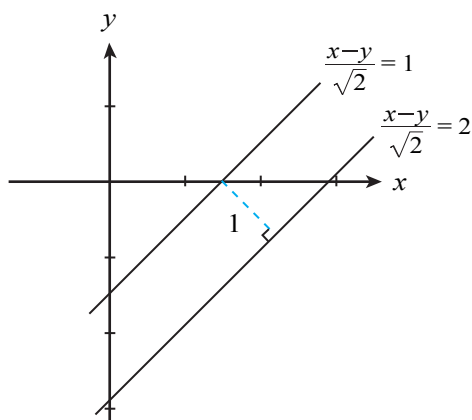
這兩個例子乍看之下沒有關係，其實都在進行「換底」——例 1 是把 x 換成 $x-2$ ，例 2 是把 x 換成 $x-3$ 、把 y 換成 $y+1$ 。我們想建立的觀點如下：

坐標軸的平移或旋轉相當於尋找新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸，不但要讓方程式變得更為簡潔，還要維持舊坐標系的兩個性質：

1. 坐標軸保持正交（orthogonal）。
2. 單位長度保持不變（normalize）。

舉例來說， $x-y=0$ 與 $x+y=0$ 彼此正交，但不符合第 2 項要求，例如， $x-y=1$ 與 $x-y=2$ 的距離是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，而 $\frac{x-y}{\sqrt{2}}=1$ 與 $\frac{x-y}{\sqrt{2}}=2$ 的距離是 1。





因此，我們選擇把 $\bar{y} = \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 0$ 當成 $\bar{x}$ 軸，把 $\bar{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$ 當成 $\bar{y}$ 軸，這樣才能符合上述2項條件。

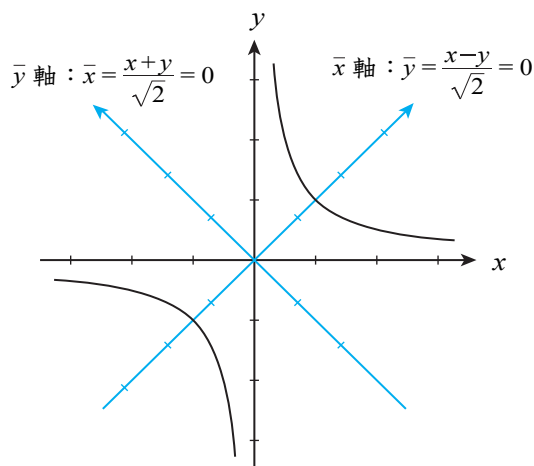
【例3】

將雙曲線 $xy = 1$ 寫成標準式。

如果沒有意外，將原始坐標軸逆時鐘旋轉 45° 應該是一個自然的猜測。因此，我們想直接驗證這個猜測是正確的。假定新的 $\bar{x}$ 軸為 $\bar{y} = \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 0$ ，

新的 $\bar{y}$ 軸為 $\bar{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$ ，那麼，

$$\begin{aligned} xy &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = \frac{2(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 - 2(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2}{4} \\ &= -\frac{(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2}{2} + \frac{(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2}{2} = \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1. \end{aligned}$$



由此可以看出， $xy = 1$ 是一個實軸半長為 $\sqrt{2}$ 的等軸雙曲線。 □

例3的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸是碰巧猜中的，而不是藉由一個可信賴的程序找到的。以下我們會逐步建立一個適用所有情況的操作程序，將任意的二元二次方程式標準化，此刻先讓我們從初步的圖形分類開始：

二次曲線的分類

給定

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

為了讓圖形從「歪的」變成「正的」，我們想尋找新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸，姑且先把它們寫成兩個正交直線 $mx - y = 0$, $x + my = 0$ 。（請注意：這裏沒有考慮 $\frac{mx-y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$ 與 $\frac{x+my}{\sqrt{m^2+1}} = 0$ 是為了減輕計算負擔，我們的策略是先處理「正交」，然後再「單位化」，完整的步驟請參見例4~9。）

我們希望原方程式中的

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

可以改寫成

$$k(mx-y)^2 + l(x+my)^2$$

即

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\ &= k(mx-y)^2 + l(x+my)^2 \\ &= k(m^2x^2 - 2mxy + y^2) + l(x^2 + 2mxy + m^2y^2) \\ &= (km^2 + l)x^2 - 2m(k-l)xy + (k + lm^2)y^2 \end{aligned}$$

基本上， k, l, m 的三元方程組

$$(*) \begin{cases} A = km^2 + l \\ B = -2m(k-l) \\ C = k + lm^2 \end{cases}$$

一定有解，稍後會有實例加以說明，現在讓我們先觀察

$$4AC - B^2 = 4(km^2 + l)(k + lm^2) - 4m^2(k - l)^2 \\ = 4kl(m^2 + 1)^2$$

因此， $4AC - B^2$ 的正負號決定了 kl 的正負號，而 kl 的正負號則決定了二次曲線的類別，更明確地說，

$$4AC - B^2 > 0 \Rightarrow k, l \text{ 同號}$$

$\Rightarrow$ 方程式圖形為橢圓類

$$4AC - B^2 < 0 \Rightarrow k, l \text{ 異號}$$

$\Rightarrow$ 方程式圖形為雙曲線類

$$4AC - B^2 = 0 \Rightarrow k, l \text{ 有一為 } 0$$

$\Rightarrow$ 方程式圖形為拋物線類

這就是為什麼我們寧可選擇 $4AC - B^2$ ，而非 $B^2 - 4AC$ ，作為二元二次曲線的判別式。我們雖然犧牲了第一階段的易記性：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判別式 $b^2 - 4ac$ 和這裏的判別式具有相同的外貌；卻保留了第二階段的暗示性： $4AC - B^2$ 的正負號決定 kl （或一般教科書中的 $A'C'$ ）的正負號。

對圖形類別有了初步的認識之後，接下來我們將以實例示範如何找出新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸，由於這是整個理論的核心，請允許我們再重複一次：新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸不但要讓方程式變得更為簡潔，還要維持舊坐標系的兩個性質：「坐標軸保持正交（orthogonal）」、「單位長度保持不變（normalize）」。

從實例中體驗方法

【例 4】

將 $7x^2 + 4xy + 4y^2 = 5$ 寫成標準式。

解：

為了讓圖形從「歪的」變成「正的」，我們想尋找新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸，姑且先把它們寫成兩個正交直線 $m\bar{x} - \bar{y} = 0$ ， $\bar{x} + m\bar{y} = 0$ 。更明確地說，我

們希望把原方程式中的 $7x^2 + 4xy + 4y^2$ 改寫為 $k(m\bar{x} - \bar{y})^2 + l(\bar{x} + m\bar{y})^2$ ，因此，我們需要求解(*)

這個方程組，將 A, B, C 分別以 7, 4, 4 代入可得：

$$\begin{cases} 7 = km^2 + l & (1) \\ 4 = -2m(k - l) & (2) \\ 4 = k + lm^2 & (3) \end{cases}$$

由(1)-(3)得到

$$3 = (m^2 - 1)(k - l)$$

或

$$k - l = \frac{3}{m^2 - 1} \quad (4)$$

又(2)可改寫為

$$k - l = \frac{-2}{m} \quad (5)$$

綜合(4)(5)得到

$$\frac{-2}{m} = \frac{3}{m^2 - 1}$$

$$\Rightarrow -2m^2 + 2 = 3m$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2m - 1)(m + 2) = 0$$

不論挑選 $m = \frac{1}{2}$ 或 $m = -2$ ，都能夠讓新的方程式省略 $\bar{x}\bar{y}$ 這個交叉項，我們習慣挑選斜率為正值，也就是 $m = \frac{1}{2}$ ；代回原方程組解得 $k = \frac{12}{5}$ ， $l = \frac{32}{5}$ 。於是，我們可將 $7x^2 + 4xy + 4y^2 = 5$ 改寫為

$$\frac{12}{5} \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + \frac{32}{5} \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 5.$$

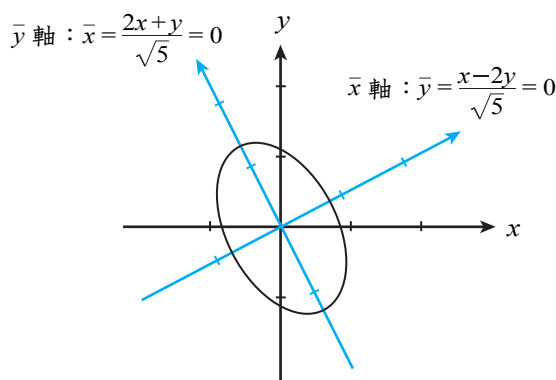
找到了一組正交的坐標軸 $\frac{x}{2} - y = 0$ 與 $x + \frac{y}{2} = 0$ 之後，接下來我們要將他們「單位化（normalize）」，過程如下：

$$\frac{12}{5} \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + \frac{32}{5} \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4}(x - 2y)^2 + \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{4}(2x + y)^2 \cdot 5 = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} \left(\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot 5 + \frac{8}{5} \left(\frac{2x + y}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot 5 = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{5}{3}} + \frac{\left(\frac{2x + y}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{5}{8}} = 1$$



如圖，我們習慣讓旋轉角度介於 $(0, 2\pi)$ ，因此挑選 $\frac{x-2y}{\sqrt{5}} = 0$ 作為新的 $\bar{x}$ 軸，即 $\bar{y} = \frac{x-2y}{\sqrt{5}} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{2x+y}{\sqrt{5}} = 0$ 為新的 $\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{2x+y}{\sqrt{5}} = 0$ 。因此，

$$\frac{(\frac{x-2y}{\sqrt{5}})^2}{\frac{5}{3}} + \frac{(\frac{2x+y}{\sqrt{5}})^2}{\frac{5}{8}} = 1$$

被進一步改寫為

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{5}{3}} + \frac{\bar{x}^2}{\frac{5}{8}} = 1, \text{ 或者, } \frac{\bar{x}^2}{\frac{5}{8}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{5}{3}} = 1. \quad \square$$

嚴格說來，例 4 還是一個比較特殊的例子，因為原方程式缺少一次項，我們現在來看一個沒有缺項的例子。有了例 4 的經驗，再加上篇幅限制，接下來的算式會顯得比較精簡，若有任何疑惑，不妨隨時回顧例 4 的作法。

【例 5】

將 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 22y - 15 = 0$ 寫成標準式。

解：

首先，我們要把原方程式中的 $5x^2 - 6xy + 5y^2$ 改寫為 $k(mx-y)^2 + l(x+my)^2$ ，這相當於求解方程組

$$\begin{cases} 5 = km^2 + l & (1) \\ -6 = -2m(k-l) & (2) \\ 5 = k + lm^2 & (3) \end{cases}$$

我們挑選其中一組解： $m = 1, k = 4, l = 1$ ，因此 $5x^2 - 6xy + 5y^2$ 被改寫為 $4(x-y)^2 + (x+y)^2$ 。

接下來是本題異於例 4 的關鍵，我們希望把原方程式中的 $-10x + 22y$ 改寫為 $x-y$ 與 $x+y$ 的「線性組合」，也就是說，

$$-10x + 22y = a(x-y) + b(x+y)$$

這相當於求解方程組

$$\begin{cases} -10 = a + b \\ 22 = -a + b \end{cases}$$

即 $a = -16, b = 6$ 。到這裏，原方程式已被改寫為

$$4(x-y)^2 + (x+y)^2 - 16(x-y) + 6(x+y) - 15 = 0.$$

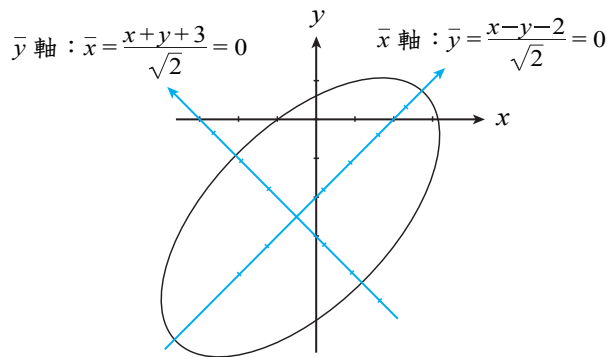
再以 $x-y$ 與 $x+y$ 為「底」分別作配方，可將方程式進一步改寫為

$$4(x-y-2)^2 + (x+y+3)^2 = 40$$

於是，我們找到了一組正交的坐標軸 $x-y-2=0$

與 $x+y+3=0$ ，接下來，就是「單位化」了：

$$\begin{aligned} 4(x-y-2)^2 + (x+y+3)^2 &= 40 \\ \Leftrightarrow 4\left(\frac{x-y-2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{x+y+3}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 &= 40 \\ \Leftrightarrow \frac{(\frac{x-y-2}{\sqrt{2}})^2}{\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{x+y+3}{\sqrt{2}})^2}{\frac{20}{2}} &= 1 \end{aligned}$$



如圖，我們取 $\frac{x-y-2}{\sqrt{2}} = 0$ 為新的 $\bar{x}$ 軸，即

$\bar{y} = \frac{x+y+3}{\sqrt{2}} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{x+y+3}{\sqrt{2}} = 0$ 為新的

$\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{x-y-2}{\sqrt{2}} = 0$ 。因此，

$$\frac{(\frac{x-y-2}{\sqrt{2}})^2}{\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{x+y+3}{\sqrt{2}})^2}{\frac{20}{2}} = 1$$

終於改寫成

$$\frac{\bar{y}^2}{5} + \frac{\bar{x}^2}{20} = 1, \text{ 或者, } \frac{\bar{x}^2}{20} + \frac{\bar{y}^2}{5} = 1.$$

【例 6】

將 $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 45$ 寫成標準式。

解：

首先，我們要把原方程式中的 $4x^2 - 24xy + 11y^2$ 改寫為 $k(mx-y)^2 + l(x+my)^2$ ，這相當於求解方程組

$$\begin{cases} 4 = km^2 + l & (1) \\ -24 = -2m(k-l) & (2) \\ 11 = k + lm^2 & (3) \end{cases}$$

我們挑選其中一組解： $m = \frac{3}{4}$ ， $k = \frac{64}{5}$ ，

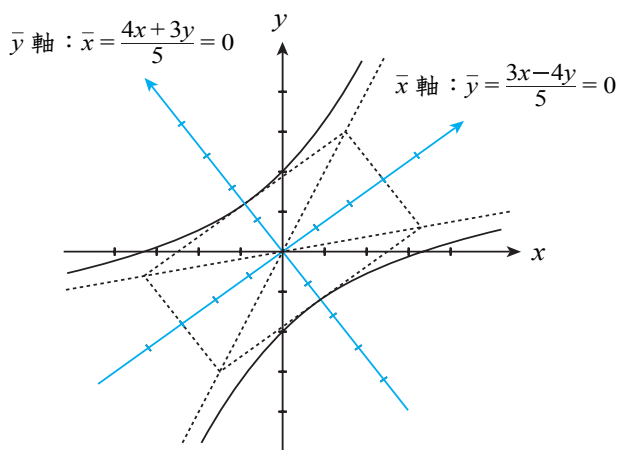
$l = -\frac{16}{5}$ ，因此，原方程式可改寫為

$$\frac{64}{5} \left(\frac{3}{4}x - y\right)^2 - \frac{16}{5} \left(x + \frac{3}{4}y\right)^2 = 45.$$

接下來，我們要把正交的坐標軸 $\frac{3}{4}x - y = 0$ 與

$x + \frac{3}{4}y = 0$ 進行「單位化」：

$$\begin{aligned} & \frac{64}{5} \left(\frac{3}{4}x - y\right)^2 - \frac{16}{5} \left(x + \frac{3}{4}y\right)^2 = 45 \\ \Leftrightarrow & \frac{64}{5} \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{3x-4y}{5}\right)^2 \cdot 25 - \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{4x+3y}{5}\right)^2 \cdot 25 = 45 \\ \Leftrightarrow & \frac{\left(\frac{3x-4y}{5}\right)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{\left(\frac{4x+3y}{5}\right)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$



如圖，我們取 $\frac{3x-4y}{5} = 0$ 為新的 $\bar{x}$ 軸，即

$\bar{y} = \frac{3x-4y}{5} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{4x+3y}{5} = 0$ 為新的

$\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{4x+3y}{5} = 0$ 。因此，原方程式可標準化為

準化為

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{9}{4}} - \frac{\bar{x}^2}{9} = 1, \text{ 或者, } -\frac{\bar{x}^2}{9} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{9}{4}} = 1. \quad \square$$

【例 7】

將 $4x^2 + 24xy + 11y^2 - 24x + 28y - 44 = 0$ 寫成標準式。

解：

首先，我們要把原方程式中的 $4x^2 + 24xy + 11y^2$ 改寫為 $k(mx-y)^2 + l(x+my)^2$ ，這相當於求解方程組

$$\begin{cases} 4 = km^2 + l & (1) \\ 24 = -2m(k-l) & (2) \\ 11 = k + lm^2 & (3) \end{cases}$$

我們挑選其中一組解： $m = \frac{3}{4}$ ， $k = -\frac{9}{5}$ ，

$l = \frac{36}{5}$ ，因此，原方程式中的 $4x^2 + 24xy + 11y^2$ 可改寫為

$$-\frac{9}{5} \left(\frac{4}{3}x - y\right)^2 + \frac{36}{5} \left(x + \frac{4}{3}y\right)^2$$

或

$$-\frac{1}{5}(4x-3y)^2 + \frac{4}{5}(3x+4y)^2.$$

接下來，我們希望把原方程式中的 $-24x + 28y$ 改寫為 $4x - 3y$ 與 $3x + 4y$ 的「線性組合」，也就是說，

$$-24x + 28y = a(4x - 3y) + b(3x + 4y)$$

這相當於求解方程組

$$\begin{cases} -24 = 4a + 3b \\ 28 = -3a + 4b \end{cases}$$

即 $a = -\frac{36}{5}$ ， $b = \frac{8}{5}$ 。

到這裏，原方程式已被改寫為

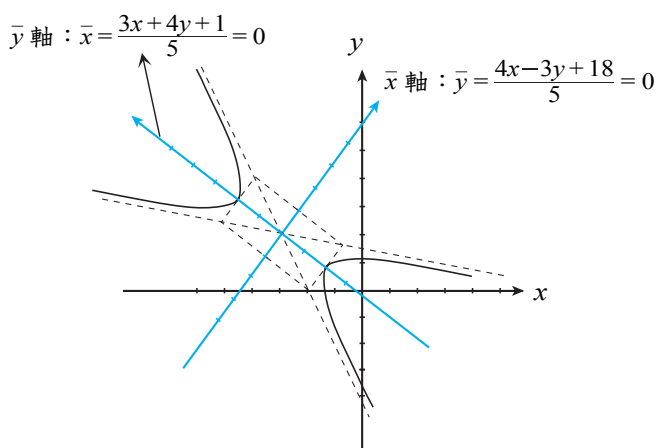
$$\begin{aligned} & -\frac{1}{5}(4x-3y)^2 + \frac{4}{5}(3x+4y)^2 - \frac{36}{5}(4x-3y) + \\ & \frac{8}{5}(3x+4y) - 44 = 0. \end{aligned}$$

再以 $4x - 3y$ 與 $3x + 4y$ 為「底」分別作配方，方程式可改寫為

$$-\frac{1}{5}(4x - 3y + 18)^2 + \frac{4}{5}(3x + 4y + 1)^2 = -20。$$

現在，我們要把正交的坐標軸 $4x - 3y + 18 = 0$ 與 $3x + 4y + 1 = 0$ 「單位化」：

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{5}(4x - 3y + 18)^2 + \frac{4}{5}(3x + 4y + 1)^2 = -20 \\ \Leftrightarrow &-\frac{1}{5}\left(\frac{4x - 3y + 18}{5}\right)^2 \cdot 25 + \frac{4}{5}\left(\frac{3x + 4y + 1}{5}\right)^2 \cdot 25 \\ &= -20 \\ \Leftrightarrow &\frac{\left(\frac{4x - 3y + 18}{5}\right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{3x + 4y + 1}{5}\right)^2}{1} = 1 \end{aligned}$$



如圖，我們取 $\frac{4x - 3y + 18}{5} = 0$ 為新的 $\bar{x}$ 軸，即 $\bar{y} = \frac{4x - 3y + 18}{5} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{3x + 4y + 1}{5} = 0$ 為新的 $\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{3x + 4y + 1}{5} = 0$ 。因此，原方程式可標準化為

$$\frac{\bar{y}^2}{4} - \frac{\bar{x}^2}{1} = 1, \text{ 或者, } -\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1。 \quad \square$$

【例 8】

將 $x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0$ 寫成標準式。

解：

首先注意到判別式 $4AC - B^2 = 0$ ，這不但提醒我們遇到了拋物線類，而且作法與之前的橢圓類及雙

曲線類不同。首先， $x^2 - 2xy + y^2$ 可寫成完全平方式 $(x - y)^2$ ，由它而聯想到的 $x - y = 0$ 將作為新坐標軸的雛型（因為尚未「單位化」），我們再挑選一條與它正交的直線 $x + y = 0$ 作為它的搭檔。接下來就如同例 5 與例 7 所作的，我們希望把原方程式中的 $8x + 8y$ 改寫為 $x + y$ 與 $x - y$ 的「線性組合」，也就是說，

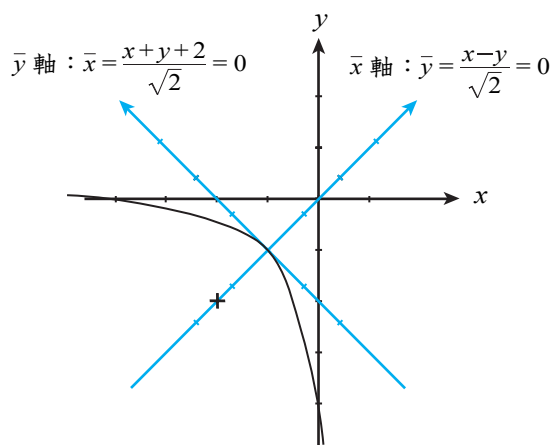
$$8x + 8y = a(x + y) + b(x - y)$$

這相當於求解方程組

$$\begin{cases} 8 = a + b \\ 8 = a - b \end{cases}$$

即 $a = 8, b = 0$ 。因此，原方程式可改寫為

$$\begin{aligned} &(x - y)^2 + 8(x + y) + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x - y)^2 = -8(x + y + 2) \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 = -8\left(\frac{x + y + 2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}\right)^2 = -4\sqrt{2}\left(\frac{x + y + 2}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$



如圖，我們取 $\frac{x - y}{\sqrt{2}} = 0$ 為新的 $\bar{x}$ 軸，即 $\bar{y} = \frac{x - y}{\sqrt{2}} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{x + y + 2}{\sqrt{2}} = 0$ 為新的 $\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{x + y + 2}{\sqrt{2}} = 0$ 。因此，原方程式可標準化為

$$\bar{y}^2 = -4(\sqrt{2})\bar{x}。 \quad \square$$

【例 9】

將 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 11 = 0$ 寫成標準式。

解：

首先注意到判別式 $4AC - B^2 = 0$ ，這提醒我們遇到了拋物線類，而且 $x^2 - 4xy + 4y^2$ 可寫成完全平方式 $(x - 2y)^2$ ，由它而聯想到的 $x - 2y = 0$ 將作為新坐標軸的雛型，我們再挑選一條與它正交的直線 $2x + y = 0$ 作為它的搭檔。

接下來，我們希望把原方程式中的 $10x$ 改寫為 $x - 2y$ 與 $2x + y$ 的「線性組合」，也就是說，

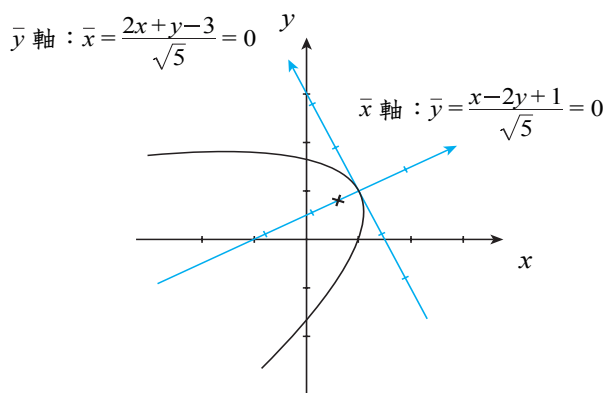
$$10x = a(x - 2y) + b(2x + y)$$

這相當於求解方程組

$$\begin{cases} 10 = a + 2b \\ 0 = -2a + b \end{cases}$$

即 $a = 2, b = 4$ 。因此，原方程式可改寫為

$$\begin{aligned} (x - 2y)^2 + 2(x - 2y) + 4(2x + y) - 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2y + 1)^2 &= -4(2x + y - 3) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot 5 &= -4\left(\frac{2x + y - 3}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}\right)^2 &= -4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{2x + y - 3}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$



如圖，我們取 $\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}} = 0$ 為新的 $\bar{x}$ 軸，即

$\bar{y} = \frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}} = 0$ 。類似地，我們取 $\frac{2x + y - 3}{\sqrt{5}} = 0$ 為

新的 $\bar{y}$ 軸，即 $\bar{x} = \frac{2x + y - 3}{\sqrt{5}} = 0$ 。因此，原方程式

可標準化為

$$\bar{y}^2 = -4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\bar{x}.$$

□

結語

從例 4 到例 9，我們不但順利地把二元二次方程式標準化，同時也輕易地在舊坐標系上畫出了方程式的圖形以及新的 $\bar{x}$ 軸與 $\bar{y}$ 軸的位置，有助於同學將代數與幾何作更深的連繫。不過，這套方法最具威力的部分展現在處理拋物線的情況，事實上，這套方法正是在處理拋物線的標準化時所發現的。

另外，讀者可能已經查覺，雖然我們作的是坐標軸的平移與旋轉，卻幾乎沒有談到平移與旋轉的字眼。粗略地說，考慮一對正交的直線 $mx - y = 0$ 與 $x + my = 0$ ，就是在進行坐標旋轉；針對同底的二次項與一次項作配方，就是在進行坐標平移。或許，本文所提供的方法不像一般教科書呈現得那麼「有學問」，但採用本文的方法進行解題時，同學對流程中的每一個步驟是有覺知的，而不是糊里糊塗地被人牽著鼻子，甚至閉著眼睛夢遊。

最後，我們想分享一個比喻：和天生視障的人討論光，或者，和天生聽障的人討論聲音——這不僅困難，甚至是不可能的。這雖然是一個極端的比喻，卻很適合身為老師的我們隨時自我提醒：學生既有的經驗與認知是什麼？如何以學生的舊經驗為出發點，協助他建立新的認知？

高效能學習法之二

簡單與困難之間

◎陳子軒／大直高中

前言

老師們賣力的在講台上說得口沫橫飛，也儘量放慢速度，總以為這樣夠清楚了吧！但事實上發現，學生的表現總是有那麼一段落差，已經很用功的無辜學生也不解地看著老師：「你說這些題目很簡單，為什麼我總是覺得很困難？」到底這簡單與困難之間的鴻溝是什麼？本文試著用解析的角度，提供個人的一些淺見，期收拋磚引玉之效，更希望未來能集合老師們的智慧，共創老師愉快教學，學生愉快學習之美好教學環境。

首先先談談學生對數學排斥感的消除。

排斥的消除

為什麼排斥數學？

「很難啊！」

「老是考不好啊？」

「答案老是錯的！」

在這些同學的回答中，不難看出數學在他們心中的感受，因此在一開始接觸到學生時就必須消除他們的恐懼不安，營造快樂的學習氣氛及喚回同學信心，而在這當中，學生的意願是一個很重要的因素，雖然很難讓所有學生都很有興趣來學數學，但起碼做到不排斥。

一般不喜歡數學的原因最常見的就是：第一、害怕考試，因為數學不像其他科有唸就有分，最起碼必須要把觀念弄懂，不然很可能亂套一場，還是沒有分數。第二、數學看不到他的用處，至少現實生活中很少要直接使用所學的結論。第三、數學很難了解，最常發現的就是上課講的一個段落，有些同學很難進入情況。第四、過去的經驗，有些同學從小數學不好，影響了他的信心，但事實上這又是分數惹的禍。

那麼要如何消除這些因素，至少讓他做到不排斥呢？進行的原則：

一、在心理方面：

建立信任感、不斷用關心和耐心去對待他們。關心和了解他的生活，甚至認同他生活中可取的部分，都會讓他對老師有信任感，那麼即使他不喜歡數學，但因為他跟老師處得好，再加上老師的關心和鼓勵，他就不會放棄，會漸漸修正他的價值觀，只要不放棄，就有成功的一天。

其實所有人的學習永遠是在快樂的環境下進行效果最好，因為在愉悅的環境中，他會永遠保持學習的動力。而在進行的過程中，難免會有不聽話的小孩，弄得老師們七竅生煙，但在這時，老師們若能停一下，用包容的心同時看到他的優點，進而鼓勵他，情形一定會有所改善。因為總要有一方是理性的，而老師是引導學生學習的角色，更需要包容所有的現象，營造一個最佳的學

習環境。當老師們沒有過度的情緒干擾，也才能針對任何狀況做出最適當的處置，這樣才不會傷害彼此好不容易建立起的信任感和互動關係，也就有較大的機會幫他找出一條適合他學習的易行道。

二、實際處理上：

針對以上四種原因分別處理：

在害怕考試方面，以筆者目前在班上所施行的方式作為例子，隨堂考試或其他的測驗基本上是不列入平常成績的考慮，而且也明白的告訴學生。如此一來，一方面可以避免他們作弊（反正分數不算成績，且平常老師們也不斷強調榮譽的重要），一方面回歸到測驗的基本精神只是為了解學習成效如何（但還是要打分數，如此才知道學習成果如何）。另一種是用討論來取代考試，發下去一張試卷，讓他們用分組討論的方式完成試卷，讓每一個人都把觀念弄懂，隔天再收卷，然後配合口試（抽問），以真正了解同學是否完全弄懂。總之，改變同學把數學和數學考試畫上等號的想法，去掉考試的束縛後，快樂學數學的理想就可在課堂中漸漸實現。

至於數學的用途，其實可以告訴學生就是在做參數分析，也就是對於一件事情，必定有它的起始條件、邊界條件、目標函數、變數有多少、變量和變量之間有什麼關係……等，在生活中隨時都會遇到。舉例來說，同學每天要上學，需要掌控的變數很多，書包要裝什麼，今天要不要帶便當，穿體育服還是制服，要幾點出門，要做什麼車，這些都是變數，這些變數之間都存在著某種關係，例如：若是很早出門，就有很多種交通工具可供選擇，但若是很晚出門，可能就只能搭計程車了。這就是交通工具和時間的關係，這種分析的能力就是數學要訓練的。

重要的是教會學生如何運用已知條件去進行分析以求得最佳的解，這種參數的解析能力，愈

早學會和精熟，學生不但學習速度會愈快，對於生活中面對的各種難題，也就常常能掌握重點，更能得到合理的解決。透過以上這些概念的不斷說明，讓每一個人都在數學訓練中獲得思考的提升，也讓學生明白也許數學的結論一輩子用不上，但學習數學的過程卻是日常處理問題能力的關鍵啊！

數學不好了解，可用解析的方式來協助同學，先問哪個部分不好了解，然後針對那個部分再細分成許多小單元，分別去了解，再串聯起來，就會容易了解了。我發現同學學習時，常常遇到困難就認為這整個單元都不會，事實上可能他只是某個常用的環節需要修正而已，所以老師可以在教導學生時，不斷舉例協助他找出不會的環節，成功經驗一多，困難度就會降低了。再利用小老師及分組的機制，透過全班團隊合作，讓每一個人盡量做到在課堂上就弄懂所有的觀念，慢慢地，數學就不再如想像中的困難了。

過去的經驗，常常限制我們，一般人都是如此，不斷的鼓勵和建立成就感是我試過最好的辦法，當成就感累積夠多時，才有機會轉化過去的經驗，但這過程中需要老師及同學本身耐心的等待。

當恐懼不安的感覺漸漸減少時，就可以來探討一下到底同學學習數學的困難點在哪裡？有沒有辦法透過一些方式找到癥結所在呢？

數據會說話－用系統分析的方式找出問題的癥結

考得很爛，爛在哪裡？

學生常會說：「哎喲，這次考得好爛喔！」以往我總是安慰他們：「不要緊，盡力就好。」有一次，我突然心血來潮問了一句：「爛在哪裡？」學生的回答是：「也不知道啊，反正就是

很爛嘛！」這使我有了一個想法，能不能用客觀分析的方法，幫助他們找出原因加以改進，如果因此而獲得了成就感，也許從此就對學習有了興趣呢？

於是某次測驗完後，我在課堂上請他們將改完的考卷放在桌上，開始對失分的部分做百分比的統計，計分四類如下，並列出各類中細分的原因及建議改善方案：

題目看不懂：

- ① 句子中文意思不懂：解釋清楚即可。
- ② 數學名詞不懂：查課本，了解這個名詞的意義，最好能再用自己的話說一遍，讓同學聽聽看是否正確。
例如：求 -175° 在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之間的同界角。
將同界角的定義看一遍，然後用自己的話講給同學聽聽看是否正確，然後再來處理本題。
- ③ 數學涵義不懂：表示題目的參數超過學生的負荷範圍，可將整題分成若干小段，分別了解各小段的數學涵義，若還是不懂，再分成更細的小段，分到完全懂為止。

題目看得懂但不知從何下手：

- ① 結論忘了，也沒有能力推導出來，因而無法下手：回到課本，再將此段結論了解清楚，直到能用自己的話講給別人聽為止。
例如： $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 三角角度之比為 $2:3:7$ ，求三邊長之比。
學生運用國中小比例分配的知識可以求出三個角分別為 30° 、 45° 、 105° ，但他忘了正弦定理，也推導不出來，回到課本了解清楚，並用自己的話講給別人聽，再回到本題來。

- ② 對於解決問題的關鍵能力反應不出來：可重複建立此種觀念的連結。

例如： 40^{255} 除以13的餘數為？用到了除法原理及二項式定理，同學產生問題的地方常發生在不知道要使用除法原理。

題目看得懂也知道用何種觀念，但卻算不出來：

- ① 代數運算能力不夠：如三角恆等式的證明。
- ② 無法適切的轉換成所要的形式：

例如： $\cos\theta + 2\sin\theta = \frac{3}{2}$ ，求 $\sin\theta = ?$

有些學生題目看懂了，也知道用兩邊平方的技巧來求解，但他直接兩邊平方，出現了 $\cos^2\theta + 4\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta = \frac{9}{4}$ ，結果就卡住了，有些學生好一點，有了下一步， $3\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta = \frac{5}{4}$
($\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)，到這裡還是卡住了。

- ③ 各觀念之間的連結性不夠：這部分比較困難，也是需要老師和同學一起下工夫的地方。

題目看得懂也知道用何種觀念，也試出結果了，但結果卻不對：

- ① 誤用觀念：可多練習將觀念講給老師及同學聽，互相校正錯誤。
- ② 計算錯誤：「多練習計算就好了嘛！」但好像不見得是如此，常觀察到同學計算的疏忽是因為無法同時兼顧思考及計算，再加上緊張所導致的，上期曾提出觀察力的練習，提升同步掌握數個參數的能力，計算自然不容易犯錯。

當同學統計出各類問題在失分中所佔的百分比後，接著可針對失分比例高的項目擬定改善計畫。

例如：某同學粗心計算錯誤的比例偏高，於是

一、擬定策略如下：

- A、每天做觀察力的練習。
- B、每天練習將算式寫清楚，避免因算式寫不清楚而導致錯誤。
- C、每天找 10 題當測驗，看看自己的答對率有多少，從中去改正常犯錯的計算習慣。

二、每天用表格紀錄 A、B、C 的執行度，舉例如下：完全做到打✓，部分做到打△，沒做到打×

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
A	✓	×	✓	✓	✓	×	✓
B	✓	△	✓	✓	✓	×	×
C	✓	✓	×	✓	×	✓	✓

這是某位同學針對此策略的執行度，這三種策略的執行度都算還不錯。

三、一星期後，可透過平時考看看自己在粗心計算錯誤的比例是否有減少，若連續數週，計算錯誤的比例都在遞減中，則大致上此策略為有效策略。

以上談了這麼多，但在課堂上究竟老師該如何做，才能讓師生間的鴻溝變小呢？以下提出筆者在課堂教學的配套措施，請各位先進指教。

5 分鐘課堂學習法

常常是老師在台上講的又賣力又清楚，覺得學生應該很容易接受了，但事實上有些同學根本連一句話也聽不懂，為什麼會有這樣的現象呢？關鍵在價值體系的接受度。與其讓同學被動的接受課程及老師給與的價值觀，不如讓他們主動的來掌握課程，我把這個動作稱為學習的格式化

(Format)。就好像將磁片格式化後，同學只需要把學到的資料一個個安插到已經排好的架構中即可。

方法

Step1：在一個新的課程開始時，請同學利用 5 分鐘的時間快速搜尋以了解單元重點，即從此課程的首頁開始瀏覽，在 5 分鐘的時間內，看得愈多愈好。

此階段訓練同學 5 分鐘的專注，並訓練同學搜尋並快速掌握重點的能力，經過此階段後，同學的腦中對此單元不會再是一片空白，而是已經結構化，至少有一點點概念，知道此單元在做什麼。如同磁片格式化的一個儲存區，剩下只需要把東西有系統的一個一個填進來即可。

Step2：看完之後，請同學用自己的話說說看他了解到了什麼？

此階段在訓練同學的組織能力，讓同學用自己的話說出來，老師可以立即知道同學不懂的地方，同學自己也可以馬上知道哪裡還不懂。藉由這樣的說明，同學也會更清楚本單元的架構，在對應中，老師可以發現學生在腦中對此單元的圖像，以便於講解時能契合同學的圖像，而使再深的概念都容易懂了。

Step3：老師補充說明

此段在強化整個課程的架構，補充同學圖像裡的缺陷，結構化的課程能讓同學學得又快又清楚。

Step4：討論時間

經過前面 3 步驟後，必定仍有一些同學（也許學習能力並非很好的）無法完全了解，藉由分組分層的班上分組型態，由同學互相討論，使概念更清楚。

Step5：例題講解

藉由不同深入淺出的問題，將整個題目分解成若干小段，對各小段做分析，訓練同學解析題目的能力，使學生觀念更清晰。

Step6：再一次討論時間

使跟不上的同學藉由其他同學的輔助，能把最基本的課程精神了解清楚。

Step7：隨堂測驗

讓同學寫寫看，是否能不靠其它同學的協助獨立完成。測驗完成後，交換改分數，再發還本人，由小組成員幫忙解決問題，直到完全弄懂為止。

這樣的課堂學習法，可以使老師了解每一個同學在學習上遇到的困難，透過一些機制加以解決，而其中掌控整個機制的關鍵就在分層分組的落實。以下進一步說明。

分組分層解決常態編班老師的困境

班上程度參差不齊，是老師們常遇到的問題，特別是數理科，很難讓所有學生都跟上老師的進度。教得深，有人跟不上；教得淺，有人又不耐煩。這裡提出一個方法，就是分組分層。

也就是將班上同學分成若干小組，每小組5~6人，而在每小組中，選程度很好的作為組長，由組長擔任小老師，教導中等程度的學生，再由中等程度帶中下程度的學生，建立起研究討論的風氣。以同學教同學，一來同學不會有抗拒性，二來比較好玩，三來同學比較了解同學到底哪裡不懂，四來對擔任小老師的人來說，因教學而把觀念弄得更清楚，真正達到教學相長的目的。

經過這樣的分組後，發現不但同學間的感情更好，互助合作的風氣跟著形成，連本來學習意願很低的同學也沒有放棄數學。但是對時間的掌控上就需要因時因地制宜，但這至少是一個可以有效喚起同學學習風氣的機制。

這樣的分層分組，可以適用於每一科的教學中。在我任教的班級中，目前都有進行這樣分層分組的機制，發現他們互相討論的風氣形成，也帶動了全班的團隊合作風氣，做任何事都大家一起參與，很多的創意和潛力都這樣被激發出來了。

另一點值得深思的是，在這機制中可以發現哪些同學熱心助人，願意無條件、有耐心的去幫助同學；但有些同學，雖然很聰明，但幫助同學的意願卻不高，這其實讓我看到一個問題，這些聰明的同學不習慣團隊解決問題，不習慣資源共享，但在這個綜合性的時代裡，團隊合作、為別人著想、願意幫助別人□愈來愈成為競爭優勢的指標，因此老師們可以鼓勵這些同學，甚至賦予責任，把同學帶好，一方面培養責任心，一方面培養良好的人際關係及團隊合作的默契，更重要的是願意幫助弱勢的同伴，發揮同學愛，我想這是教育的目的吧！

結語

教育是一項很有挑戰性的工作，同時也是自我成長及成就感最高的工作，如何訓練出一群真正有良好品格，豐富學識的有用人才，需要所有的教師一起努力，任重而道遠，但每一次感動的師生交流，都將是人生中永遠的回憶吧！



多采多姿的三角天地

評《毛起來說三角》

◎蘇俊鴻／北一女中

就寫書評來說，評介一本四年前出版的書，似乎有欺騙稿費之嫌。身為一位數學教師，每當課程進行到三角函數時，繁多的三角公式頓時湧現於眼前，加上學生本身運算能力的不足，因此望之卻步，學習意願一落千丈，也常有「為何而學」之感。若我們想由三角測量的問題來強調學習三角函數的重要性，事實上，在中算的發展歷史中，卻很容易舉出反證（請參考第9期〈中國的測量〉）。因此，我們帶領學生學習三角函數這個題材時，可以從更多方面來尋找適當的補充材料，開拓學生的視野，激發他們學習的動機。

然而，相關題材的補充資料難尋是另一個問題，常讓人在教學的引導上，有巧婦無米可炊之嘆，更是足見《毛起來說三角》這本書的難能可貴。作者的文筆相當流利，相當具有可讀性，書中內容包羅萬象，足見作者對此一主題資料收集的功力。深覺應推介給對三角函數題材有興趣的同好知曉，它會讓人重新體會三角函數的風貌。由序言中不難發現，作者對於此書寫作的動機是肇因於1960年代美國實施「新數學」，造成學生認為「三角學是加了桂冠的幾何學，再加上計算的苦刑」，呼應了筆者一開頭所提教學所遭遇的困境。因此，Maor 寫作本書試圖反駁這個說法。在取材的廣度上，除了引入三角學歷史發展的過程外，也選擇甚多三角學中有趣的例子，或是與其他領域相關（如地圖繪製）的題材。在讀者設定上，也以高中生和大學生為主，因此內容

的深度多半利用基本的代數與三角學知識便可理解，討論的重點也侷限在平面三角學上。

本書共有十五章及四個附錄，就內容可分成下列幾項：

- (1)三角學發展的歷史（前言，第一章至第四章）；
- (2)三角學的應用（第五章及第十三章）；
- (3)平面三角學中有趣的題材（第六章至第十二章）；
- (4)三角學進一步的延拓（第十四章及第十五章）。

由章節分量的安排可見，作者並無意讓本書成為三角學發展史的專書，倒是極力想介紹一些在三角學中被人遺忘，但又非常美麗易懂的公式或性質，期許讀者能重拾對三角學的興趣與熱情。

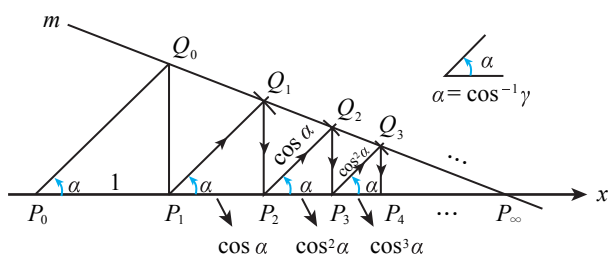
其中筆者認為在教學上，對於我們最有助益的，就是平面三角學中有趣題材的搜集。譬如第六章，由「圓中一弧所對的圓心角等於圓周角的兩倍」的定理，推而證明正弦定理及倍角定理，給我們一個不同於現行教材利用面積相等的證明方法。這樣將任意三角形看成圓的內接三角形的方式，是比較符合希臘人的看法。把正弦定理看成與圓有關，能給我們更多的幾何意義上連結。再來 Maor 透過托勒密定理，給出畢氏定理的另一種證明；也證明出正弦函數的和角公式。讓我們進一步了解托勒密定理在三角學上的重要性，並非是我們習題中一個不起眼的問題罷了。

在第九章是有關無窮等比級數的論述，最精彩的部份是「任何一個收斂的無窮等比級數，均可用直尺和圓規以幾何方法作出，並可由圖形求和」，筆者尤其推薦此章，Maor 試圖想告訴讀者對三角學的理解，不應只是繁複的三角函數計算的代數面向，它有著極為美麗可見的幾何面向（此想法散見各章）。其基本想法是 -1 到 1 之間的任意實數，均可與 0° 到 180° 間的餘弦函數一一對應，因此級數和

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots \quad (-1 < r < 1)$$

可看成

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cdots + \cos^n\alpha + \cdots,$$



▲ 圖 1 $S = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cdots$ 的幾何作圖（見中文版 158 頁）

如此一來，我們就能由幾何作圖來求和（圖 1 為銳角的情形）。此外，Maor 在三角學進一步延拓的描寫中，深覺：「三角學的歷史中，有三項發展特別顯著，基本上改變了整個課題：托勒密的弦表，使得三角學成為實用的計算科學；棣美弗定理及歐拉的公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，使得三角學與代數和分析學相融合；再來就是傅立葉定理。」（見中文版 251 頁）更能讓人了解三角學的重要性。

值得一提的是，Maor 將一些相關的數學史傳記或材料補充於章節之後，共有八篇。雖然這些文章多半都是根據二手文獻改寫，多半是「非主流」數學家的生平與貢獻（如雷吉蒙塔努斯（Regiomontanus），棣美弗（De Moivre），阿涅西（Agnesi）），或是在數學史專書中少見的資

料（如棣美弗與牛頓的關係，維埃塔（Viète）如何利用三角函數解出四十五次的方程式的正根），可見 Maor 在寫作的選擇上有其「另類」的想法。

綜觀全書作者在題材選擇和鋪陳上，仍然遵循著三角學發展的歷史架構。雖然在三角學發展的歷史上，省去球面三角學的發展與相關題材的作法，讓人深覺可惜，但在作者的生花妙筆下，書中的各種主題相當平易近人。筆者更希望大家能體會 Maor 想扭轉讀者對於三角學只是由一堆三角公式所堆砌出的刻板印象之用心，他在每一章節儘可能將三角學與幾何學緊緊相扣，為三角公式找到幾何解釋與論證。這樣的努力是值得我們喝采！

在教學工作上，筆者深刻地體會，如何讓學生能「看見」一個數學式子的意義是非常困難的，若能藉由幾何圖解，往往比較能讓學生容易感受。Maor 的現身說法，無疑地開啟一條努力的道路。事實上，我們常常能從古代文本中，獲得許多學科知識因為本身或是外在因素的演進，而被遺忘的舊有風貌，如果能適當地賦予意義重新詮釋，對於教學工作的啟發有著莫大的助益！

最後，筆者覺得必須為譯者的用心說上幾句，本書的中文版相當流暢，也能扣住作者的本意，除了一些數學家的人名或著作的譯名與慣用的稱呼有些出入。值得一提，譯者對於書中人名翻譯都會附注原文，這是相當棒的作法，如果能將提及的數學著作也附上原文，那就更加完備。此外，有幾處明顯錯誤也需注意，在 107 頁的 Stirling 公式應為 $n! \div \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ ，及 175 頁表 4 下方的一行文字應為「由北極到赤道的距離恰為赤道圓周長（書中誤譯為半徑）的四分之一」。至於令人詬病專業名詞誤譯的問題並未出現，這應該與譯者本身的數學專業有關，這也是讀者在選購科普翻譯書籍時，一個重要的參考指標。

數學模擬軟體「圖形的平移與伸縮」簡介

◎洪育祥、洪麗婷、徐萬星、戴賢文／潮州高中
(以上按姓名筆劃排列)

編者按：

教育部為推動資訊融入教學，積極協助有意願、有潛力的高中職學校發展為「資訊種子學校」。在數學領域方面，93 年度唯一通過教育部審核為種子學校者，就是屏東縣潮州高中。潮州高中結合了數學與資訊的專業老師，以 Flash MX 2004 為主要工具，發展出一套模擬軟體。本文含蓋了這套軟體的操作簡介與使用建議，也包含了潮州高中的實施成果與評鑑。非常歡迎大家一起到潮州高中的網站免費試用這套軟體，更期待這個軟體或這篇文章能促成一些討論與交流，讓我們共同思考資訊融入教學的現在與未來。

壹、前言

近年來，資訊科技的日新月異，令人目不暇給，其對人類具有廣泛影響與衝擊，是不可否認的事實，尤其透過網際網路的推波助瀾，更提高其影響力。雖然資訊科技已對教育界造成深遠的影響，但資訊與網路科技，是否可應用於高中教育，尤其是需要數字及圖形的數學教學領域，則是本研究關心的課題。

本研究希望能藉資訊科技的進步，尤其是動畫軟體（Flash MX 2004）的進步，著手開發數位學習軟體，並透過網路的媒介，輔助學生學習高中數學，並提供教師改進教學的參考。

貳、目標

本數位學習模擬軟體適合單機及網路使用，乃針對數學乙下冊「圖形的平移與伸縮」單元所設計。對象以高三學生（社會組或自然組均可）為主，教授完整的圖形平移與伸縮的概念，使學

生掌握圖形的平移與伸縮，及對方程式產生的變化之規則；高一和高二學生則為輔，於教授指數、對數、三角函數及圓錐曲線時，用於加強學生對圖形的認知。為符合各家版本需求，內容幾乎囊括市面版本可能提及的函數及方程式，俾供各校自由運用。為使軟體操作簡單明瞭，並減少過多文字敘述，符號的表示採用龍騰版本。

本研究開發之軟體分為「操作單元」、「教學單元」、「測驗單元」及「成績查詢單元」等四個單元。為達到計畫的「模擬」功能，軟體開發中儘可能於單元中提供真實教學實際情境。首先，學習者自行透過操作軟體的過程，激起學習興趣並累積經驗，這過程包括：學習者本身的數學代數推演、認識圖形與方程式變化關係等；其次，教師適時的導入教學，以延續並提昇學習經驗，最後則透過測驗的方式，過程中包括立即性的回饋和引導，以評量學生的學習成就與教師的教學效率。



參、系統特色、需求及操作方法

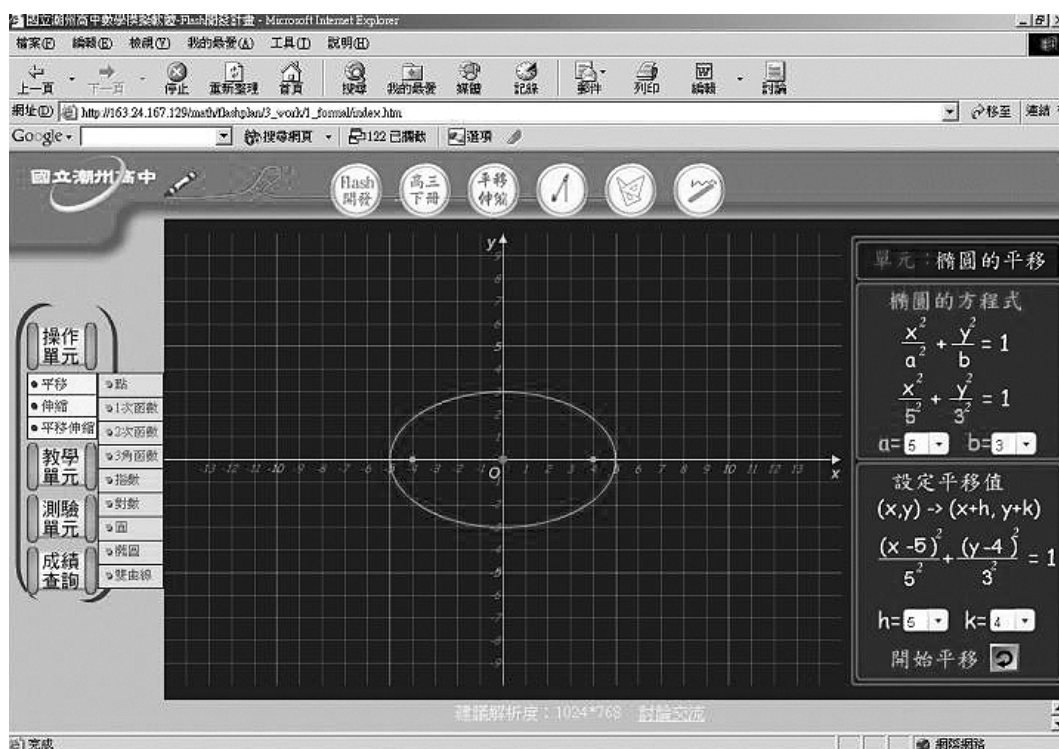
一、系統特色

- (一) 本系統以 Flash MX 2004 及 ASP 開發，適用網路及單機環境。
- (二) 以 Web-Base 為執行環境，檔案小、執行速度快，系統簡單、方便，可於有網路的地方執行遠距教學。
- (三) 內建資料庫，可對個別、全班及全校學生教學、練習及測驗。
- (四) 可執行系統單一功能，如【橢圓伸縮】，教師可直接連結使用。
- (五) 個人測驗成績／全班測驗成績查詢。
- (六) 系統建置討論園地，可與作者意見交流。
- (七) 系統首頁提供更多使用手冊。

二、系統需求

- (一) 伺服器需求

- 1. 作業系統：Windows 2000 Server 或以上
- 2. 資料庫：Microsoft Access
- 3. 瀏覽器：IE 5 以上
- 4. 檔案大小：約 7 MB
- (二) 用戶端需求
 - 1. 網路執行
 - (1) Microsoft Windows 98 / Me / NT / 2000 / XP 以上
 - (2) 瀏覽器：IE 5 以上
 - 2. 本機單獨執行（光碟片執行或安裝至硬碟執行）
 - (1) Microsoft Windows 98 / Me / NT / 2000 / XP 以上
 - (2) 瀏覽器：IE 5 以上
 - (3) 檔案大小：約 7 MB
 - (4) 操作、教學及測驗等單元可執行，唯成績記錄及查詢無法執行



三、操作方法

(一) 操作單元

1. 本操作單元分三個項目：
 - (1) 平移。
 - (2) 伸縮。
 - (3) 平移與伸縮。
2. 每項目再分成三個主題九個細項：
 - (1) 「點」（僅在平移單元）。
 - (2) 「函數」包含一次、二次、三角、指數、對數。
 - (3) 「方程式」包含圓、橢圓、雙曲線。

3. 按鈕說明



：下拉式選單，可選擇設定。



：執行平移或伸縮設定之結果。

4. 平移操作方法

- (1) 在「原始題目設定區」用下拉式選單輸入適當數值。

- (2) $h=5$ $k=4$ ：設定 X 軸與 Y 軸的「平移量」。

- (3) 執行平移設定結果。

5. 伸縮操作方法

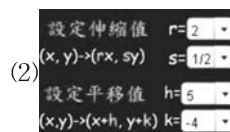
- (1) 在「原始題目設定區」用下拉式選單輸入適當數值。

- (2) $r=2$ $s=1$ ：設定 X 軸與 Y 軸的「伸縮量」。

- (3) 執行伸縮設定結果。

6. 平移伸縮操作方法

- (1) 在「原始題目設定區」用下拉式選單輸入適當數值。



- (2) $(x,y) \rightarrow (rx, sy)$ $(x,y) \rightarrow (x+h, y+k)$ ：同時設定 X 軸與 Y 軸的「平移與伸縮量」。

- (3) 先平移再伸縮 ：執行先平移再伸縮結果。

先伸縮再平移 ：執行先伸縮再平移結果。

※(4)在「圓的伸縮與平移單元」：本單元特別設定一操作範例，說明如何設定伸縮與平移量，使得不論是先平移再伸縮，或是先伸縮再平移，得到相同結果。

(二) 教學單元

1. 本單元分三個小單元：

(1)平移。 (2)伸縮。 (3)平移與伸縮。

2. 單元一：平移

(1)內含「點、一次函數、二次函數、三角函數、指數函數、對數函數、圓、橢圓及雙曲線」等九種函數和方程式，可依需求自由選用。

(2)解題過程：按「上一步」或「下一步」逐一出現每一推演的步驟。

(3)圖形：按「看圖形」，可重複操作。

3. 單元二：伸縮

(1)內含「一次函數、二次函數、三角函數、指數函數、對數函數、圓、橢圓及雙曲線」等八種函數和方程式，可依需求自由選用。

(2)解題過程：按「上一步」或「下一步」逐一出現每一推演的步驟。

(3)圖形：按「看圖形」，可重複操作。

4. 單元三：平移與伸縮

(1)內含「一次函數、二次函數、三角函數、指數函數、對數函數、圓、橢圓及雙曲線」等八種函數和方程式，可依需求自由選用。

(2)解題過程：按「上一步」或「下一步」，逐一出現每一推演的步驟，包含「先平移後伸縮」與「先伸縮後平移」兩種變換過程，便於比較兩者的差異。

(3)圖形：按「先平移再伸縮」或「先伸縮

再平移」，會依序出現變化後的圖形，可重複操作。

(三) 測驗單元

1. 本單元分三個小單元：

(1)平移。 (2)伸縮。 (3)平移與伸縮。

2. 進入各單元前需先登入

登入方法：

(1)輸入學號。

(2)輸入密碼，預設密碼「11」。

(3)點選「登入」。

3. 按鈕說明

	：檢查答案		：做對題數
	：做錯題數		：錯誤重做
	：下一題		：重秀題目
	：結束測驗		

4. 平移操作方法

(1)用滑鼠左鍵將圖形中心點平移至題目要求的坐標處。

(2)按「檢查答案」鈕。

5. 伸縮操作方法

(1)輸入 X 軸與 Y 軸的「伸縮量」。

(2)按「檢查答案」鈕。

6. 平移與伸縮操作方法

(1)輸入 X 軸與 Y 軸的「平移量」。

(2)輸入 X 軸與 Y 軸的「伸縮量」。

(3)按「檢查答案」鈕。

7. 注意事項

(1)每個小單元測驗題數皆為十題，答錯可重做，但重做的題目不計分。

(2)做完十題後，需按「結束測驗」鈕 ，才能正確記錄分數。

(四) 成績查詢單元：

1. 本單元分三個小單元：

(1)【查詢個人】成績單。

(2) 【查詢班級】成績單。

(3) 【修改密碼】。

2. 單元一：【查詢個人】成績單

(1) 查詢個人成績單：

①輸入學號。

②輸入密碼，預設密碼「11」。

③點選「登入」。

(2)查詢個人基本資料：

①輸入班級代號，如「101」。

②輸入密碼，預設密碼「000」。

③點選「登入」。

3. 單元二：【查詢班級】成績單

(1)輸入班級，如「101」。

(2)輸入密碼。

(3)點選登入。

4. 單元三：【修改密碼】

(1)輸入學號。

(2)輸入原密碼。

(3)輸入新密碼。

(4)點選登入。

5. 注意事項

(1)成績查詢之程式設計採ASP，資料庫採Microsoft Access系統，因此必須將系統置於微軟IIS伺服器方能執行。

(2)本系統內建全校學生基本資料，可針對全校學生測驗及成績查詢。

(3)成績只保留最新一筆資料。

的迷思概念做釐清。建議時間分配如下：

時間 (分)	平移		伸縮		平移與伸縮		成績查詢	概念釐清
	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作		
操作單元	5	10	5	10	5	15		
一般教學	依各班需求決定							
測驗單元 1	5	15	5	15			3	7
測驗單元 2					10	30	3	7

二、教學中

完全以模擬軟體進行概念教學。可分四節課，第一節課教授「平移」概念，含操作、教學、測驗、成績查詢及迷思概念釐清；第二節課教授「伸縮」概念，含操作、教學、測驗、成績查詢及迷思概念釐清；第三節課教授「平移與伸縮」概念，含操作及教學；第四節課進行「平移與伸縮」概念之測驗單元，另含成績查詢及迷思概念釐清。課本內其它教材部分依各班需求決定上課節數。建議時間分配如下：

時間 (分)	操作單元		教學單元		測驗單元		成績查詢	概念釐清
	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作		
平移	5	10	5	5	5	10	2	3
伸縮	5	10	10	5	5	10	2	3
平移與伸縮 1	5	15	15	15				
平移與伸縮 2					10	30	3	7
其餘教材	依各班需求決定							

三、教學後

先進行一般紙筆教學，後利用模擬軟體加強。可分三節課，第一節課加強「平移」概念，含操作、教學、測驗、成績查詢及迷思概念釐清；第二節課加強「伸縮」概念，含操作、教學、測驗、成績查詢及迷思概念釐清；第三節課加強「平移與伸縮」概念，含操作、教學、測驗、成績查詢及迷思概念釐清，唯此節因所需測

肆、融入教學模式

一、教學前

利用「操作單元」（一堂課）讓學生累積經驗，建立初步認知；再輔以一般紙筆教學掌握規則；後使用「測驗單元」（二堂課），了解學生學習成果，最後可用「教學單元」針對學生仍有

驗時間較長，而操作單元及教學單元的操作說明可沿用前面經驗，故予以省略。

項目 \ 時間 (分)	操作單元		教學單元		測驗單元		成績查詢	概念釐清
	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作	操作說明	學生操作		
一般教學	依各班需求決定							
平移	5	10	10	5	5	10	2	3
伸縮	5	10	10	5	5	10	2	3
平移與伸縮	0	8	0	8	3	25	2	4

四、自學輔導

輔助重（補）修學生學習，並以測驗成績為學習成果參考依據，只需限定完成的時間即可。

五、高一、二輔助教學

可於教授高一、高二拋物線、指數函數、對數函數、三角函數及圓錐曲線時使用，加強圖形的概念及性質。使用時數可依各班需求決定。

最後，我們將以上的使用建議歸納成兩個使用原則：

一、教師使用方式

- (一) 可做輔助教學軟體（融入教學的模式可參考第肆項）：教師可將測驗成績納入平時分數，並依據測驗成果進行補救教學。
- (二) 指定為學生的回家作業：增強學生對圖形的平移與伸縮具體且直觀的認知，彌補黑板作圖的不足。測驗可限時完成，並納入平時成績計算。

二、學生使用方式

- (一) 課前操作：可在學習此單元前，藉由「操作單元」自行操作練習，以建立簡單概念或產生相關問題，利於後續的學習。
- (二) 課後複習：此軟體可扮演家庭教師的角色。除提供重複操作各種圖形的伸縮與平移的變化功能外，在學生較不易掌握的方程式推演上，學生可藉由「教學單元」，

依個人習慣的速度，逐步觀看推演的過程進行比較，並搭配圖形的變化，建立兩者的關聯。還可視需要重複各個單元的操作，直到觀念釐清為止。

- (三) 自我檢測：學生可於學習基本概念後，利用「測驗單元」自我檢測學習成果，單元內題目採隨機方式出題，故學生亦可重複測驗。

伍、實施與評鑑

實際運用這套軟體於本校數學教育，計有高三3個班級學生140人進行3小時教學，研究提出以下幾項結論：

一、教學上優點

- (一) 學生的學習興趣大增。
- (二) 學生進行測驗時非常專注且積極，與一般進行紙筆測驗的情形差別甚大。
- (三) 學生能針對個別需求選擇相關單元重複操作，直到觀念釐清為止。故此模擬軟體可以滿足學生個別不同的需求。
- (四) 學生能獲得立即性的回饋（個人成績及全班排名）。
- (五) 完整操作後，學生對圖形的平移與伸縮有更具體且直觀的概念。
- (六) 對於掌握圖形的平移與伸縮使方程式產生改變的規則，明顯的比使用前更好。
- (七) 對於圖形「先平移再伸縮」與「先伸縮再平移」的差異以及所變換後的方程式之不同，能更清楚地分辨。
- (八) 課後還可繼續操作，無時間上的壓力，可以輕鬆學習。

二、教學上缺點

- (一) 進行教學單元時，學生注意力較不易集中。故進行此單元教學時，教學者需費較

多的心力並放慢解說和操作的速度，幫助學生容易吸收。另外，可提醒學生在進行後續單元的操作時，如有問題可隨時回到「教學單元」或「操作單元」重複操作，再次釐清觀念。

- (二) 此軟體只包含圖形的平移與伸縮的基本概念題，並不包含變化的題型，故使用者必須另外進行其它相關教材的教學。

綜合以上結論，開發模擬軟體雖然費時耗力，使用上也需要更多的軟硬體設備配合，但對學習者而言，能提供更強的學習動機及嘗試錯誤的機會（傳統的教學方式較無法提供），並且使學生獲得立即性的回饋，提高學習興趣，還可不受時間、地點及方式的限制，輕鬆地依個人的需求學習。所以，本軟體不僅可提供教師較新的教學模式，更重要的是帶給學生全新的學習體驗，並創造更自主的學習空間。

陸、後記

從去年十月份開始到今年的六月，在這九個月的時間裡，歷經「確認軟體設計目標」、「決定主題」、「設計架構」、「解決問題」、「逐步完成」、「實驗教學」、「修改」到「推廣」，雖然費時頗多，但能根據自身的教學經驗結合校內電腦專業師資，藉助 Flash 軟體的特色，設計出可提升學生學習成果及老師教學效果的模擬軟體，雖然補助的經費不多，但從無到有的過程，我們獲得的不只是成就感還有設計模擬軟體的寶貴經驗與技能，這些都是我們樂於分享的。可惜在北東中南的四場推廣會中，我們發現獲得此訊息的老師並不多，使得推廣的成效有限，希望藉由此篇簡介能促進大家更多的交流，為數學教育添注活水，這也是龍騰《數學新天地》發行的目的，在此特別感謝他們的邀稿。

各位先進如有任何指教或關於此軟體的問題或需要索取此軟體，歡迎到本校數學模擬軟體網頁（http://163.24.167.129/math/flashplan/3_work/1_formal/index.htm）留言，或留下您的 e-mail，我們會盡快與您聯絡。

附註：教學資源

- [1] 潮州高中本軟體網站：http://163.24.167.129/math/flashplan/3_work/1_formal/index.htm
- [2] 教育部學習加油站：<http://content1.edu.tw/>
- [3] 數學資訊網：<http://infomath.nctu.edu.tw/>
- [4] 台大數學：<http://www.math.ntu.edu.tw/link/link.htm>
- [5] bee 美麗之家：<http://web.chsh.chc.edu.tw/bee/old-math/first.htm>
- [6] 大陸高中數學 FLASH：<http://5inet.cn/web/flash-works/htm/shuxue.htm>
- [7] 香港教育資訊數學網站：<http://www.edp.ust.hk/math/>



課堂著作權



朱碧華

噹噹噹噹……

耳邊又傳來班長「起立、立正、敬禮～老師好」的聲音，唉～又是一堂課的開始。

早已立冬，今天的天氣也未免太熱了！……那天弘弘拿給我的「模擬市民II」實在太精采了，今天晚上一定要再來玩個通宵，……欸！昨天晚上阿肯不是說要去看王菲演唱會嗎？……下課就要去買票了吧？……唉呀，今天實在不適宜上課，把我的MP3拿來錄音算了，考試時再說吧！現在先來做個大頭夢，為晚上的活動準備好體力！Yes！……管他是蘇軾李白還是杜甫大人啊！周公最好囉！

學生上課錄音是否須經老師同意？

老師於課堂中講課，其所完成之著作屬於語文著作中的「演講」（法條一），將老師的演講（授課的內容），以MP3隨身碟錄音留存起來，乃重製（法條二）的行為。而重製依據著作權法第二十二條（法條三）規定乃專屬於著作人之權利，任何人未經著作權人同意或授權不得重製其著作。所以學生上課要將老師的授課內容加以錄音，是應該要經過老師同意。

法條解說

- (一) 著作權法第五條第一項各款著作內容例示
「語文著作：包括詩、詞、散文、小說、劇本、學術論述、演講及其他之語文著作。」
- (二) 著作權法第三條第一項第五款「重製：指以印刷、複印、錄音、錄影、攝影、筆錄或其

他方法直接、間接、永久或暫時之重複製作。於劇本、音樂著作或其他類似著作演出或播送時予以錄音或錄影；或依建築設計圖或建築模型建造建築物者，亦屬之。」

- (三) 著作權法第二十二條「著作人除本法另有規定外，專有重製其著作之權利。表演人專有以錄音、錄影或攝影重製其表演之權利。」





參考解答

問題集IX

誌謝

感謝全國師生對問題集的熱烈迴響！由於篇幅所限，我們實在無法將全部稿件一一刊載，敬請大家見諒。底下是所有參與問題集IX的師生名單，《數學新天地》謹此致上最深的謝意：

胡照南／台南高商；林翠峯／桃園高中；陳文憲／高雄前鎮高中；郭儒鍾／桃園高中；蘇啟天／高雄文山高中；林志漢／台北市私立大同高中；黃見益／彰化女中；廖森游／台北縣安康高中；王宏哲／台中二中；胡立人同學／台北縣安康高中；陳映先同學／台中女中；林昭宏同學／台北市華江高中；李維昌／宜蘭高中；黃玠豪同學／高雄仁武高中；張進安／高雄中正高中；林沛儒同學／台北內湖高中；許瑋婷／台南女中；陳佳煌／台中一中；鄭仕豐／彰化鹿港高中

（以上依進稿先後順序排列）

9-1. 設 a, b 為實數，證明四次方程式

$$5x^4 + ax^3 + bx - 1 = 0$$

有一實數根 α 滿足 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 。

順便診斷一下侃庚同學的證明過程是否有誤：機靈的侃庚同學假設四次方程式的四個根分別為

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 利用根與係數的關係得到

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{1}{5}.$$

因為 $|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4| = |-\frac{1}{5}| < 1$ ，所以

$$|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| > 1, |\alpha_3| > 1, |\alpha_4| > 1$$

是不可能同時成立的。

故必有一根 α_1 滿足 $-1 \leq \alpha_1 \leq 1$ 。

【解】（張進安老師／高雄中正高中）

$$\therefore f(0) = -1$$

$$f(1) = 5 + a + b - 1 = (a + b) + 4,$$

$$f(-1) = 5 - a - b - 1 = 4 - (a + b),$$

$$\therefore f(1) + f(-1) = 8,$$

$\therefore f(1), f(-1)$ 中至少有一數為正數，

$\therefore f(0) \cdot f(1)$ 或 $f(0) \cdot f(-1)$ 至少有一數為負數，

根據勘根定理，

$f(x) = 5x^4 + ax^3 + bx - 1$ 為連續函數，

$\therefore f(x) = 0$ 至少有一實根介於 $[0, 1]$ 或 $[-1, 0]$ ，

故得證 $f(x) = 0$ 至少有一實根介於 $[-1, 1]$ ，

又侃庚同學的證法有誤，

$\therefore$ 即使 $|\alpha_i| < 1$ 成立， α_i 不一定為實數。

例： $4x^2 + x + 1 = 0$ 有 α, β 二根，

$$\text{且 } \alpha\beta = \frac{1}{4} < 1, \therefore |\alpha\beta| < 1,$$

$$\text{但 } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{8}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{8},$$

$$\text{即使 } |\alpha| = \frac{1}{2} < 1, |\beta| = \frac{1}{2} < 1,$$

並不能確保 $4x^2 + x + 1 = 0$ 有一實根在 $[-1, 1]$

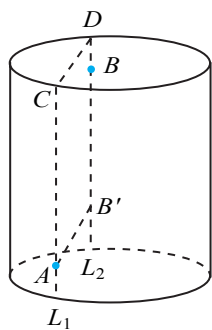
之間。 □

9-2. 如下圖所示，玻璃杯之形狀為圓柱形，半徑 5 公分，高為 15 公分，放在桌上。一隻螞蟻從玻璃杯外側的 A 點爬到杯口，再進入玻璃杯內側的 B 點喝水。假設 A, B 兩點的距離為 13 公分， A 點離杯底距離是 1 公分， B 點離杯底 13 公

分。如果忽略不計玻璃杯的厚度，那麼螞蟻從 A 點到 B 點之最短路徑是多少公分？

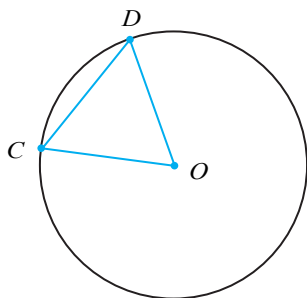
【解一】（林翠峯老師／桃園高中）

1. 如圖 1，過 A, B 兩點分別作直線 L_1, L_2 垂直於杯底，並交杯口於 C, D 兩點。



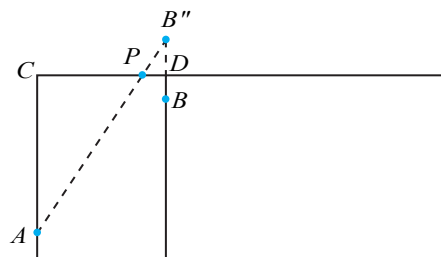
▲圖 1

2. 在 L_2 上取 B' 點，使 $\overline{BB'} = 12$ 公分，此時 A, B' 兩點均離杯底 1 公分，即 $\overline{AB'}$ 平行於杯底，故 $\overline{AB'} \perp \overline{BB'}$ 。
3. 直角三角形 ABB' 中，
 $\overline{AB'} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BB'}^2} = 5 = \overline{CD}$ ($AB'DC$ 為矩形)。
4. 考慮杯口所在的圓，設圓心為 O ， $\overline{CD}$ 為圓 O 上的弦，如圖 2。



▲圖 2

5. 因為 $\overline{CD} = \overline{CO} = \overline{OD} = 5$
 $\Rightarrow \angle COD = \frac{\pi}{3}, \widehat{CD} = \frac{5\pi}{3}$ 。
6. 將杯面從 L_1 攤開，如圖 3，即求由 A 點經杯口 ($\overline{CD}$) 上的一點 P 至 B 點的最短路徑。



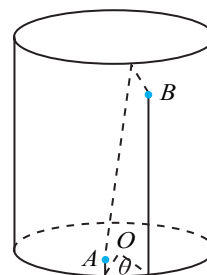
▲圖 3

7. 以 $\overline{CD}$ 為對稱軸，做 B 點的對稱點 B'' ，連接 $\overline{AB''}$ 即為所求，且

$$\overline{AB''} = \sqrt{(14+2)^2 + \left(\frac{5\pi}{3}\right)^2} = \sqrt{256 + \frac{25\pi^2}{9}}. \quad \square$$

【解二】（陳佳煌老師／台中一中）

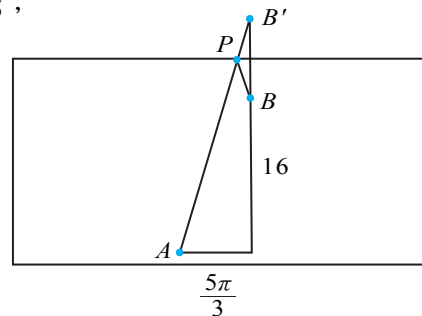
如圖 4，



▲圖 4

設 $A(5, 0, 1), B(5\cos\theta, 5\sin\theta, 13)$ ，
 則 $\overline{AB}^2 = (5-5\cos\theta)^2 + (5\sin\theta)^2 + 12^2 = 13^2$ ，
 得 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ，即 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 。

如圖 5，



▲圖 5

螞蟻從 A 點到 B 點之最短路徑
 $= \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AB'}$
 $= \sqrt{\left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 + 16^2}$
 $= \sqrt{\frac{25\pi^2}{9} + 256}.$ □

9-3. 考古學家挖到一張當時某家庭的煤氣支付表，表上列舉此家庭在當年一月、二月與三月份的煤氣用量及應繳的煤氣費用：

月份	煤氣用量	煤氣費用
一月份	4 米 ³	4 元
二月份	25 米 ³	14 元
三月份	35 米 ³	19 元

已知當時的煤氣收費標準為：

煤氣費 = 基本費 + 超額費 + 保險費。

如果每月的煤氣用量未超過基本用量，只需付基本費 3 元和每戶每月定額的保險費；若用氣量超過基本用量，超過部分每米³加收固定的金額。

已知當時的保險費不超過 5 元，請根據這些資訊，求出當年的「煤氣基本用量」、「保險費」及「超過部分每米³加收的金額」分別是多少？

【解】（林志漢老師／台北私立大同高中）

假設保險費用為 I 元，基本煤氣用量為 x 立方米，以及超過部份每立方米加收金額為 y 元，

由已知保險費不超過 5 元，

即 $0 \leq I \leq 5$ ，

故 $3 \leq I+3 \leq 8$ ，

又二月份煤氣用量金額 = $14 > I+3 = 8$

以及三月份煤氣用量金額 = $19 > I+3 = 8$ ，

故可知二月份煤氣用量及三月份煤氣用量均超過基本煤氣用量

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+I+(25-x)y=14 \cdots \textcircled{1} \\ 3+I+(35-x)y=19 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{1}$ 可得 $10y=5$ ，

故 $y=\frac{1}{2}$ （元）代入 $\textcircled{1}$

$$\text{所以 } I=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \cdots \textcircled{3}$$

考慮一月份煤氣使用量，只有兩種可能：

(1) 一月份煤氣使用量 $>$ 一月份煤氣基本用量
或 (2) 一月份煤氣使用量 $\leq$ 一月份煤氣基本用量

若 (1) 一月份煤氣使用量 $>$ 一月份煤氣基本用量，

$$\text{則可得 } 3+I+(4-x) \cdot \frac{1}{2}=4$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}x-1 \text{ 與式 } \textcircled{3} \text{ 顯然不同故不合，}$$

故可知一月份煤氣使用量必為情形 (2)：

一月份煤氣使用量 $\leq$ 一月份煤氣基本用量，

$$\text{因此 } 3+I=4 \Rightarrow I=1 \text{（元）}$$

代回 $\textcircled{3}$ 式可得 $x=5$ 立方米，

由以上討論，可得所求結果為：

煤氣基本用量為 5 立方米，保險費為 1 元，超過部份每立方米加收金額為 $\frac{1}{2}$ 元。 □

9-4. 有一種娛樂用的號碼鎖，它有三個密碼，每個密碼都是由 1, 2, 3 這三個數字所構成。開鎖者只要轉對其中的兩（含）個密碼以上，鎖就會自動開啟，例如當密碼為 (1, 2, 3) 時，轉 (1, 3, 2) 是不會開的（只轉對 1 個密碼），但是轉 (1, 3, 3) 就會打開（轉對了第 1, 3 位置的密碼）。問：對付這種娛樂鎖，你至少需嘗試幾次才保證一定能打開。

【解】（郭儒鍾老師／桃園高中）

在解題之前，先考慮以下六點：

(1) 由 1, 2, 3 所組成的三位密碼鎖共 $3^3=27$ 種。

(2) 設至少 k 次才保證一定能開鎖，則表示此 k 組號碼可以開啟所有 27 種鎖。

(3) 每一組號碼 (a, b, c) 可以開啟的鎖有七種：
（其中 $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ ）

(a, b, c) 可以開啟的密碼鎖包括 $(1, b, c)$ ，

$(2, b, c), (3, b, c), (a, 1, c), (a, 2, c)$ ，

$(a, 3, c), (a, b, 1), (a, b, 2), (a, b, 3)$ 九種，

但其中有三種是相同的，故實際只有七種。

例：若 $(a, b, c) = (2, 1, 2)$ ，

則 $(2, b, c) = (a, 1, c) = (a, b, 2)$ 。

(4)考慮兩組號碼 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ ，若其中有一個號碼相同的話，不失一般性，設 $a_1 = a_2 = a$ ，則兩組號碼均可開啟 $(a, b_1, c_2), (a, b_2, c_1)$ 兩種鎖，故這兩組號碼至多可開啟 $14 - 2 = 12$ 種鎖。

(5)由(2)、(3)，得 $k \geq \frac{27}{7}$ ，即至少要 4 次才保證一定能開鎖。

(6)若 4 次為至少次數，假設此 4 組號碼依序為 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), (a_4, b_4, c_4)$ 。又 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3\}$ ，由鴿籠原理可知其中必有 $a_i = a_j$ ($i < j$ ，且 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$)，所以此四組號碼至多可開啟 $28 - 2 = 26$ 種鎖（由第(4)點），故 4 次無法保證一定能開鎖。

經由以上六點，只要有五組號碼可開啟此 27 種鎖，則 5 次即為最少次數。事實上，答案是肯定的，而且方法還不只一種。

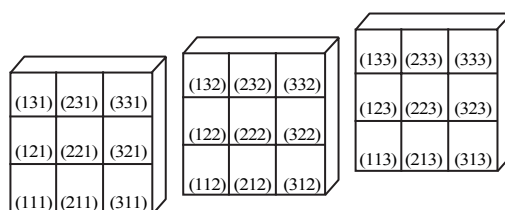
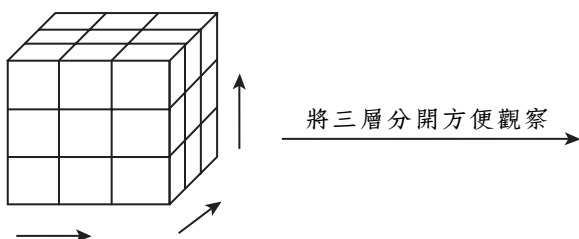
以下列出二種參考解答：

第一種： $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 1), (1, 3, 3), (3, 1, 3)$ 。

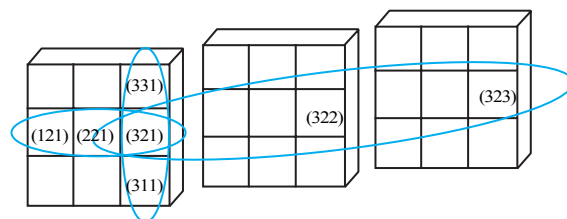
第二種： $(3, 1, 3), (1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 3, 2), (2, 1, 2)$ 。

補充：

此題可以利用邊長為 3 的正方形來考慮，將之分割為 27 個小立方體，並配合空間坐標，則每一個立方體代表一組密碼，並將在同一直線相連的三個方塊稱為線，在同一平面上的九個方塊稱為面。而每一組號碼可以開啟的七道鎖，即為與此組號碼在同一線上的七組，如下圖。



以(321)為例，可開的七道鎖如下



若第一次選定 A 方塊，則包含 A 方塊的三個平面上的任一個方塊 B ，所能開啟的七個方塊，必有兩個以上與 A 的七個方塊重疊（ A 所在的三條線，與 B 所在的三條線至少會有兩個交點）。因此若要 4 次完成，則所選的四個方塊，必需任兩塊不共面（此處的面，為前面所定義），故無法 4 次完成。因此只要能找到五個方塊，且包含這五個方塊的十五條直線，通過 27 個方塊，即為解答。

猜測：

至於五次完成，雖然有很多解。但若不拘泥在數字 1, 2, 3 上，將 27 組密碼改為符號 $\{(a_i, b_j, c_k) \mid i, j, k \in \{1, 2, 3\}\}$ ，在某種定義下，其實只有一解 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_1), (a_1, b_3, c_3), (a_3, b_1, c_3)$ 。

例如：

上面所說的兩種參考解答中，

令 $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3), (b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3), (c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 3)$ 為第一種解，

令 $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 2), (b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3), (c_1, c_2, c_3) = (3, 1, 2)$ 為第二種解，

若以方塊來解釋，則更為清楚。在 27 塊立方體中，若將任二個平行面對調位置，並不會影響到開鎖的數目。所以各個不同的解，只是方塊的排列方式改變罷了。

而五個方塊的找法為：首先任意選定方塊 A 為第一塊，在扣除包含 A 的三個平面後所剩的八個方塊中，任選任二塊不共線的四個方塊，則此五方塊即為所求。 □

9-5. 你和你的好朋友經常打桌球，根據過去的經驗得知：在每一局中，你獲勝的機率為 p ($\frac{1}{2} < p < 1$)。今天你的好朋友想跟你來一場比賽，至於是採三戰兩勝，五戰三勝或者是七戰四勝的比賽制度，由你決定。問：你應採取那一種比賽制度才有較高的勝算。

【解】（胡照南老師／台南高商）

三戰兩勝：連兩勝或最後一場勝，前兩場有一場勝，

$$\text{機率 } A = p^2 + [C_1^2 (1-p) \cdot p] \cdot p = 3p^2 - 2p^3.$$

五戰三勝：連三勝或最後一場勝，前三場有二場勝或最後一場勝，前四場有二場勝，

$$\text{機率 } B = p^3 + [C_2^3 p^2 (1-p)] \cdot p + [C_2^4 p^2 (1-p)^2] \cdot p = 10p^3 - 15p^4 + 6p^5.$$

七戰四勝：連四勝或最後一場勝，前四場有三場勝或最後一場勝，前五場有三場勝或最後一場勝，前六場有三場勝，

$$\begin{aligned} \text{機率 } C &= p^4 + [C_3^4 p^3 (1-p)] \cdot p + [C_3^5 p^3 (1-p)^2] \cdot p \\ &\quad + [C_3^6 p^3 (1-p)^3] \cdot p \\ &= 35p^4 - 84p^5 + 70p^6 - 20p^7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{考慮 } A - B &= 3p^2 - 12p^3 + 15p^4 - 6p^5 \quad \because \frac{1}{2} < p < 1 \\ &= 3p^2(1-p)^2(1-2p) \\ &< 0, \end{aligned}$$

得 $A < B$,

$$\begin{aligned} \text{考慮 } B - C &= 10p^3 - 50p^4 + 90p^5 - 70p^6 + 20p^7 \\ &= 10p^3(1-p)^3(1-2p) \\ &< 0, \end{aligned}$$

得 $B < C$,

故 $A < B < C$,

∴ 要採取七戰四勝才有較高的勝算。 □

徵答啟事

由於問題集受到全國師生的熱烈迴響，我們特別將稿件的刊登標準及酬謝方式說明如下：

一、刊登標準：

1. 基本原則：真、善、美。

(1) 真：問題必須真的被解決。

(2) 善：所採取的方法或觀點最好具有一針見血的洞察力。

(3) 美：數學作為一種語言，必須達到溝通的目的。事實上，放在心裏面是一件事，表達出來是另一件事，而藝術家和一般人的差別就在於表達能力。

2. 參酌項目：

(1) 進稿順序：先進稿者優於後進稿者。

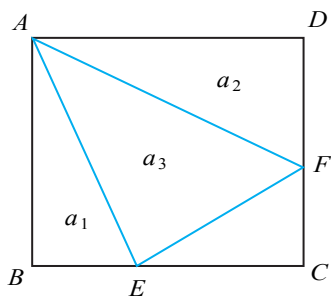
(2) 歷史記錄：未發表過者優於已發表過者。

(3) 其他：例如，受限於本雜誌整體的篇幅限制，可能無法一一刊載。

二、酬謝方式：來稿一經刊登，即可獲得精美禮品一份（基本上，以市面上最新出版的數學類圖書為主）。

問題集X

10-1. 如下圖所示： $ABCD$ 是面積為 S 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角區域的面積。



證明：

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

10-2. 阿寶有一個專門收藏一元與五元硬幣的聚寶盆，三年前聚寶盆裡總共有 345 枚硬幣。阿寶說：「過去三年來，曾經多次從聚寶盆取走一枚五元硬幣，但會馬上放入五枚一元硬幣；有時也會從聚寶盆取出五枚一元硬幣，同樣會立刻放回一枚五元硬幣。」

阿寶接著說：「底下 10 個數字中

1302, 1400, 1548, 1606, 803,

962, 1003, 1423, 1545, 1863

有一個數字是現在聚寶盆的總錢數。」讓你猜三年前聚寶盆裡一元與五元硬幣各幾枚？

10-3. 如果將地球視為一半徑 γ 的球體，定球心坐標為 $(0, 0, 0)$ ，北極坐標為 $(0, 0, \gamma)$ 。球面幾何的知識：

(1) 可以將東經 θ ，北緯 ϕ 的點坐標定為

$$(\gamma \cos \theta \cos \phi, \gamma \sin \theta \cos \phi, \gamma \sin \phi).$$

(2) 地球上兩相異點 A, B 與球心 O 三點所在的平面與地球表面的共同部分剛好是一半徑 γ 的圓。此圓上 $\widehat{AB}$ 弧（劣弧）的長度稱為 A, B 的航空距離。

回答下列問題：

(a) 求赤道上東經 0° 的點與東經 θ ，北緯 ϕ 的點之直線距離。

(b) 若將地球半徑 γ 定為 6300 公里，令 A 點代表赤道上東經 0° 的點， B 點是東經 45° ，北緯 45° 的點，則計算 A, B 的航空距離。

10-4. 設

$$f(x) = \frac{(-x^2 - x + 3)(2x^2 + 2x + 3)^2 + 4(x^2 + x)^3}{x^2 + x + 1}.$$

(1) 求函數值 $f(0), f(1), f(2)$ 。

(2) 盡可能的化簡分式 $f(x)$ 。

10-5. 已知正數 a, A, b, B, c, C 滿足

$$a + A = b + B = c + C = l.$$

證明

$$aB + bC + cA < l^2.$$

（徵答截稿時間：94 年 1 月 1 日）