編輯室報告

學『數學』是快樂的

本期《數學新天地》由師大數學系許志農教授策劃， 內容涵蓋了轉移矩陣、空間中的畢氏定理、反射定律…等。

「為什麼要學數學？」、「學數學有什麼好處？」或許是許多人求學階段的疑問。吳志揚教授將為我們剖析〈學數學的好處〉，並提出一些應用觀點供大家一同來思考。

轉移矩陣（隨機矩陣或馬可夫矩陣）是這幾年「數學甲」的聯考焦點，函數模型的應用是「數學乙」的常考題型（如國會議員席次函數，格子點三角形的面積公式，班佛法則等）。許志農教授與陳清風老師整理的〈轉移矩陣與班佛法則〉一文探討轉移矩陣的一些理論與統計學上班佛法則的介紹。

『交流道』中，我們邀請到曾憲錠老師與我們分享「推移變換為什麼叫推移？」以及李晉媛老師的「正四面體的外接球心會不會也把高分成 2：1？」。畢氏定理在我們中學的數學課程中具有重要的角色，證明方法也有數百種。在〈空間中的畢氏定理〉文中，謝銘峰老師利用高中所學的各種工具來證明空間中的畢氏定理，點出數學美妙之處。

陳子軒老師在〈高效能學習法〉一文，提供數種記憶訓練方法，讓老師能引導學生更快、更有效率的學習，不僅可應用在求學的學習過程外，亦可受用於人生各個階段。另外，計算的速度與正確性雖與數學能力的相關性不高，但在考試作答時就顯得格外重要了。蘇啟寅老師在〈速度與準度〉文中介紹數種簡易的速算方法，希望可以提昇學生在計算上的速度與準度。

公理化系統講究以最少的公設推論出所有定理，而公設的選擇要盡可能具備不證自明的特性，那麼，像反射定律這麼顯而易見的性質，還能追溯到更基本的原理嗎？另外，在圓錐曲線的光學性質中，大家總覺得缺少一些應用實例，江慶昆老師的〈漫談反射定律〉應該可以彌補一下這樣的缺憾。

三角測量是我們相當常用的一種測量方法，但中國古代在三角學理論還未發展時，就已經建立非常發達的測量技術。在〈中國的測量術〉一文中，蘇俊鴻老師將對中國古代「勾股測量」做初步介紹，讓我們一睹中國測量術的奧妙。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：吳淑芬
副總編輯：孫慧璟
責任編輯：丁貽羚
美術編輯：蔡雅貞
排版編輯：林雅琴

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248 台北縣五股鄉五權七路 1 號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-0197
創 刊 日：2002/10/1
出 刊 日：2004/9/1
網　　址：http:/www.lungteng.com.tw

目次 CONTENTS

學數學的好處

◎吳志揚／中正大學數學系

前言

我們現代台灣人從小學到高中職畢業，在這十二年中，我們不知花了多少時間學數學。然而，很多人學了十二年的數學後，不止對數學不感興趣，更對上數學課感到害怕。就一個從事數學研究及教學工作者來說，這情況實在是相當可惜，會普遍出現這種情形，是所有數學教育者、課程標準制定者及升學管道規劃者等等相關人員應該深思反省的。

其實，對很多學生來說，常常覺得數學是一門既重要又無用的課程。我們知道數學是科學之母，也聽說它不止在自然科學有很大的應用，在財務金融、經濟甚至越來越多社會科學領域也需要用到很多數學知識。可是，在日常生活中，我們好像除了數字的加減乘除外，其他的數學知識一點也不需要。在求學階段，很多人或許曾經請教過老師或長輩：「為什麼要學數學？」，我相信很多人都可以用他們的經驗給出很好的回答。在這篇短文中，我也試著來回答這個「大哉問」。

當然，「為什麼要學數學」對不同的人來說有不同的理由。有人覺得學數學可以訓練思考，有人覺得數學具有美感，也有人因為數學是很有效的分析工具，對他的工作很有幫助。對很多學生來說，學數學的最大理由是因為它是最重要的主科之一，並且它是升學考試必考的科目。因此，數學好的學生在升學時就相對有利了，而且數學成績好往往被同學、家長甚至有些老師視為聰明的表現。也因此，一個學生若是數學成績好就自認為相當聰明也覺得很有成就感。反之，若是數學成績不好就可能被視為或自認為腦筋不好。就筆者的觀點而言，數學成績的好壞與聰明程度頂多在統計上有一定的正相關，但是卻不必然可以說「數學好就是聰明、數學不好就是笨」。相信很多老師一定教過一些非常聰明的小孩，但是因為貪玩或其他因素而不喜歡讀書，致使成績不好。所以「數學好就是聰明、數學不好就是笨」這樣的說法只是一個迷思！

要回答「為什麼要學數學」這樣一個含有非常主觀價值的問題是非常不容易的。所以我們想要從學數學有哪些好處來試著分析，也許這樣可以提出一些觀點讓大家共同來思考。

(一)培養對數字及圖表的感覺

在日常生活中處處充滿數字及各種圖表，譬如每天幾點起床、何時上班上學、所經路線、今天的溫度、地震規模、風雨強度、食物的卡路里、物價的漲跌、經濟的成長率圖表、孩子的學雜費單、汽車的速度表、加油錢、百貨公司的年終打折廣告等等，無一不遷涉到數字及圖表，除了學習數字加減乘除的正確計算外，培養對數字及圖表的感覺就像平常我們打球時培養球感一樣的重要。舉例來說，現在有一些年輕學子在出社

會前就欠現金卡公司好幾十萬元，而他們不止還不起欠債的本金，甚至連 18 %的循環利息是什麼意思都不清楚，更別說它的可怕了。如果我們現在把十萬元存在銀行，然後以每年 3 %的年利率複率計算，十年後我們可以從銀行拿回大約十三萬四千四百元。然而，如果我們向銀行借十萬元，然後以每年 18 %的年利率複率計算，十年後我們必須還銀行大約五十二萬三千四百元。這中間相差三十八萬九千元，也就是本金的三點八九倍。這就是不同指數基底成長差異的驚人之處。將指數成長描繪成圖表更能看出其快速成長的面貌。利用這個差異性，金融業創造了每年豐厚的盈餘。

我們除了熟悉數字的計算外，對一些東西數目大小估算能力的訓練也是必須加強的。譬如很多會開車的人對車速的感覺就相當好。平時多練習對物體大小、空間容量、距離遠近及時間長短的估計都是有助於數字感及空間感的提升。所以了解數字變化的意涵及數目大小的估算，進而對時間的管理、個人財務的規劃是現代人相當重要的課題。其實，對感興趣事物的估算，不只對個人是重要的，對一個企業或國家來說更是緊要，像企業營收及獲利預估，國家的經濟成長率及失業率的評估等等，都對企業或國家政策的擬訂有很大的影響。

(二)訓練及提升抽象能力

數學的最大特色之一就是它的抽象性。這是對一般人來說數學之所以不容易理解的地方，但這也是數學之所以能夠廣泛應用的原因。舉例來說，我們談「三加三等於六」，我們並不關心它是三隻豬加三隻豬等於六隻豬，或者是三隻蜜蜂加三隻蜜蜂等於六隻蜜蜂。我們只關心抽象出來的數字運算「三加三等於六」。也因此數字的應用就非常廣，而不受限於豬或者蜜蜂了。其他像國小所學的未知數、各種幾何圖形、國中所學的負數、二次函數與開方根及高中所學的複數、二次錐線等等，都是抽象的概念。大家不妨想想，「負負得正」及「複數 i 的平方等於 -1」在實務上又該如何理解呢？

學習自然科學的要領即在理解各種不同現象之間的相似性及共通性。譬如，牛頓體悟出蘋果與月球同受地球的引力而提出了「萬有引力」理論。如果月球不受地球引力的吸引，那麼它將朝其軌道切線的方向飛離。從各種表面上不同現象之間，找出共同的法則是科學方法的目的。要能這樣做，就必須將表面上一些不相干或次要的東西先丟開，這樣才能抓到問題的本質。要能做到這樣，抽象能力的培養是非常要緊的，而數學即是訓練及提升抽象能力最重要的工具。

特別值得一提的是，數學的抽象性常常能使我們發現不同領域或學科之間的本質共同性。就拿前面提到利率問題時，需要用到指數函數來描述，而同樣的指數函數也是用來描述人口成長的重要工具。同樣地，指數函數出現在很多不同的領域，如熱傳導、誤差理論、甚至商品廣告模型等等，只要某類事物或資源有增長或衰退的現象，往往就需要用指數函數來刻畫。這就如同有週而復始現象時，我們常常需要借助三角函數理論來處理一樣。

(三)養成理性思考、推理與推測的習慣

數學的另一特色是邏輯推理。數學的論證是由一系列的推演而成，而其每一小步都是建立在簡單易懂的邏輯推理上。這過程就像揭開覆蓋在神秘的真理女神臉上的層層面紗，直到理解、認識到其隱藏的道理。這樣的過程不也正是在自然科學中我們探究自然定律的方法嗎？

在數學論證推理的過程中，推測扮演著非常重要的角色。它引領我們往哪個方向去思考和推理。也因此宏觀地、仔細地分析已知的資訊並避免非理性因素或詭辯的干擾，才能有效地論證。這也是為何很多數學證明是如此地嚴謹而簡潔的原因。同時，這也是很多人覺得數學理論、定理或公式具有高度美感，就像大自然的詩篇一樣引人入勝。

大約西元前三百年左右，歐基里德在其名著《幾何原本》中，即從一些明顯易懂的幾何公設出發，經由邏輯推理而推導出很多至今仍然廣為人知的重要結果，如畢式定理即是其中之一。這是數學與其它自然科學最大的不同之處，它是建立在一些明顯易懂的公設之上，並經由邏輯推理而建構出來的學問。因此，數學的論證是建立在理性的基礎上。這一點絕非同樣也強調邏輯推理重要性的法學所能比擬的。另一方面，數學觀念往往可以超越日常的生活經驗。像我們常說的點、線、面或完美的圓，在自然界中並不存在。各位試想我們如何看待一個只有位置、沒有大小的點呢？又如何看待極限、無限大、高維度空間及對稱群呢？數學觀念這種超越日常生活經驗的抽象性特質，正是它可以超越各領域範疇而應用廣泛的原因之一。

(四)熟悉基本數學知識

一般人學習一些課程無非是希望在生活上或工作上有所幫助，學數學當然也不例外。那麼我們應該學習多少基本數學知識才夠用呢？這是因人而異的。首先我們先將數學能力粗分為三級，大致如下：

初級：基本算術，包括分數與小數的四則運算，初等幾何及簡單的統計圖表。

中級：基本函數（包括指數、對數等）、初等代數、三角及解析幾何、初等機率與統計（包括期望值、標準差的計算與意義的了解）、排列與組合。

高級：微積分、矩陣、統計學、離散數學、抽象代數。

在各行各業中對數學能力的基本要求隨行業不同而不一樣，對一般的行政支援人員及勞工服務人員來說，初級的數學能力應已足夠。公司企業的高階管理者、經理及決策人員、成本分析師、會計稽核人員、機械維修人員與社會科學家等，若能具有中級以上的數學能力，應該對其專業工作有很大的幫助。自然科學家、國高中數學及自然科教師、醫師、工程師、生命科學家、計量經濟學家、建築師與系統分析師等人員，都應該具備並熟悉高級的數學能力。

在日常生活中，我們只要具有初級的數學能力就已經非常足夠了，甚至只會數字的加減乘除、會看時鐘、日歷及地圖，會記電話號碼、生日等一些最簡單的數學能力就已經足夠。這也是一般人或中、小學生會覺得幹嘛學那麼多數學的原因。甚至有人懷疑近十年來主導數學教育改革的一些學者及官員是否也可能有同樣膚淺而短視的想法呢？要不然為何數學的上課時數不增反減，並且還一味地主張減少課程綱要的範圍呢？其實這樣做，雖能減低學生學習數學的壓力，但付出的代價是全體學生數理能力的下降，並使我們未來國民的國際競爭力衰退！這對物產資源並不豐富的台灣來說，又要如何面對世界的快速變遷而與人競爭呢？

對一般人來說數學雖難，但仍有一定必須具備的基本能力，這對個人及整個國家而言都是重要的。就是因為數學抽象性高、嚴謹又簡潔而不易懂，所以才需要花更多的時間學習。學習數學必須反覆練習並確實掌握各種觀念及技巧，才能

真正培養數學能力。若要提升現今學生的數學程度，增加數學的上課時數是應該儘快做的事，這對後段班的學生或數學程度不好的學生來說更是重要。

結語

從上面的簡單探討，我們了解到數學的一些特色。事實上，數學並不只是處理數字的計算或研究幾何圖形與表格的工作；它是一種思考、分析與歸納的方法，一種定義問題、去蕪存菁、直指問題核心的方法。它可以讓我們將覆蓋在問題表面的面紗一層一層地撥開，而把問題的核心顯露出來，因而可以進一步了解到問題的本質。經由探討數學理論及利用它來了解、處理各種應用問題的經驗，可以讓我們更有效地理解數學中各種抽象的觀念，並學會掌握各種數學知識及處理問題的方法和技巧。

另一方面，處理數學問題的過程中，也對我們的人生觀有所啟示。譬如，前面提到，數學問題的處理是由一系列的推演而成，而其每一小步都是建立在簡單易懂的邏輯推理上。換句話說，數學定理的證明都是由一些簡單的推理所組成，最終可以推出非常艱深而有用的結果。這告訴我們，只要我們一步一腳印，努力向前，雖然每一步都是一小步，但終將可以有一番不錯的作為。

轉移矩陣與班佛法則

◎許志農／臺灣師範大學數學系、陳清風／桃園高中

一、前言

大學指考「數學甲」考科，在 91、92、93 連續三年都出現轉移矩陣的試題，93 年度還出現轉移矩陣的題組試題（占 22 分）。此外，93 年度「數學乙」考科選擇題第 4 題，雖主要是評量高中所學的基本函數圖形，然而其題目的設計是源自與統計有關的「班佛法則」，此法則相信對大部分的高中數學老師而言是陌生的。因此，本文將提供一些轉移矩陣的問題及「班佛法則」的簡介供老師們參考。

二、一個矩陣的問題

【例題 1】

請完成下列矩陣問題：

(1) 求矩陣

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

的反矩陣 Q^{-1}.

(2) 化簡矩陣的乘法

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=?$$

(3) 令矩陣

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.25\\ 0.5 & 0.75\end{bmatrix},$$

將矩陣 P^n 的元素表為正整數 n 的公式。

(4) 求極限矩陣

$$P^{\infty}\overset{\text{定義}}{=}\lim_{n\to\infty}P^n=?$$

(5) 證明

$$PP^{\infty}=P^{\infty},$$

也就是說，極限矩陣 P^{∞}是被 P 固定住的矩陣。

【解】

解法如下：

(1) 因為二階矩陣Q的行列式為 $1\cdot 1-(-2)\cdot 1=3$，所以由二階矩陣的反矩陣公式得到

$$Q^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -(-2) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

(2) 由矩陣的乘法得知

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}.$$

(3) 由(2)知道

$$P=Q^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}Q.$$

因此

$$P^n=Q^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}QQ^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}Q...Q^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}Q$$

$$= Q^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^{n} Q$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^{n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^{n} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \end{bmatrix}.$$

⑷ 由⑶得極限矩陣

$$P^{\infty} \overset{\text{定義}}{=} \lim_{n\to\infty} P^{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

⑸ 計算得

$$PP^{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = P^{\infty}. \quad \square$$

三、二階轉移矩陣

在談轉移矩陣之前，我們先用一例子作為引導。電腦公司開發出一部新型電腦，工程師讓電腦持續開機，並每隔一小時記錄電腦的穩定狀態。過去幾個月的測試發現，當電腦處於不穩定狀態時，有 50 %的機會，在下一小時會回復到穩定狀態，但是仍有 50 %的機會，在下一小時仍會處於不穩定狀態；而當電腦處於穩定狀態時，有 75 %的機會，在下一小時仍然在穩定狀態，但是有 25 %的機會，在下一小時會變成不穩定狀態。假如發現電腦處於不穩定狀態，那麼兩小時後仍是不穩定狀態的機率有多大？無論現在電腦處於哪一種狀態，經過 n 小時後，變成任何一種狀態的機率，會隨著 n 趨近於無窮大而趨近於何值呢？我們想透過轉移矩陣的引入，來解決這問題。

首先將電腦現在狀態與下一小時可能狀態的機率分佈表，寫成如下的二階矩陣 P：

$$\begin{array}{cc} & \text{電腦現在狀態} \\ & \begin{array}{cc} \text{不穩} & \text{穩定} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{不穩} \\ \text{穩定} \end{array} \text{一小時後狀態} \end{array}$$

如果一個矩陣的各元都大於或等於 0，而且每一行中各元的和都等於 1，這種矩陣稱為轉移矩陣。例如，矩陣 P 就是一個轉移矩陣。

轉移矩陣的次方 $P^{1}, P^{2}, P^{3}, \cdots$ 分別告訴我們不同的事情，例如由計算得知

$$P^{2} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.3125 \\ 0.625 & 0.6875 \end{bmatrix},$$

它代表的意義是「如果電腦在處於不穩定狀態，那麼兩小時後，是不穩定狀態的機率 0.375，是穩定狀態的機率 0.625；如果現在處於穩定狀態，那麼兩小時後，是不穩定狀態的機率 0.3125，是穩定狀態的機率 0.6875」。相同地，k 小時後的情形，可由計算 P^{k} 得知。

轉移矩陣 P 的方次方 $P^{1}, P^{2}, P^{3}, \cdots$ 經常會收斂於極限矩陣 P^{∞}（註）。就以這裡的轉移矩陣 P 為例，由例題 1 ⑶得 P^{n} 的公式為

$$P^{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^{n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^{n} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n} \end{bmatrix}.$$

由這公式得到極限矩陣 P^{∞} 為

$$P^{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

極限矩陣 P^{∞} 告訴我們：讓電腦長時間運作下來，不穩定的機率 $\frac{1}{3}$，穩定的機率 $\frac{2}{3}$（顧客會滿意這樣的電腦嗎）。因此，極限矩陣告訴我們長時間下來的趨勢，也就是說知道極限矩陣就等於預知未來一樣。

值得一提的是極限矩陣 P^∞ 滿足

(1) P^∞ 的每一行的和都是 1（也就是說，P^∞是轉移矩陣），第一行與第二行完成一樣。

(2) 由例題 1 (5)知

$$PP^\infty = P^\infty.$$

根據這兩個條件，求轉移矩陣 P 的極限 P^∞ 就容易多了。

【例題 2】

假設某市及其近郊人口遷移狀況為每年住在城裡的人有 90 %留在城裡，有 10 %流向郊區；而郊區的人有 80 %留著不動，有 20 %則搬到城裡。目前市區與郊區人口數約為九萬人與三萬人且該市的總人口數呈穩定狀態（每年總人口數沒有增減），那麼長期而言，該市人口之城郊分佈情形如何？

【解】

由題意知城郊的轉移矩陣為

$$P = \begin{array}{c} \text{今年} \\ \begin{array}{cc} \text{城裡} & \text{郊區} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{城裡} \\ \text{郊區} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{次年} \\ \end{array}$$

令極限矩陣

$$P^\infty = \begin{bmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix}.$$

由 $PP^\infty = P^\infty$ 得到

$$0.9a + 0.2\,(1-a) = a \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

因此

$$P^\infty = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

也就是說，長期下來，市區與郊區人口的 $\frac{2}{3}$ 會流向市區，$\frac{1}{3}$ 會流向郊區。故長期而言，市區的人口為

$$(9+3)\times\frac{2}{3} = 8\text{（萬人）；}$$

郊區的人口為

$$(9+3)\times\frac{1}{3} = 4\text{（萬人）}. \qquad \square$$

四、三階轉移矩陣

有了二階轉移矩陣的概念之後，那麼三階或者更高階的轉移矩陣呢？事實上，它們的理論與二階轉移矩陣是一樣的。就以底下的例子解說三階轉移矩陣的觀念與理論：

【例題 3】

某轎車出租經紀人擁有三處出租據點，分別標記為一、二與三。顧客可由任意出租據點租用轎車並且可在任意出租據點歸還轎車。依據過去經驗判斷：由據點一出租的汽車，在據點一、二與三歸還的機率分別為 0.5，0.5 與 0；由據點二出租的汽車，在據點一、二與三歸還的機率分別為 0.25 , 0.5 與 0.25；由據點三出租的汽車，在據點一、二與三歸還的機率分別為 0，0.5 與 0.5。試問經過一段長時間後，在據點一、二與三歸還轎車的機率分別是多少。

【解】

轎車出租據點與歸還據點的轉移矩陣為

$$P = \begin{array}{c} \text{出租據點} \\ \begin{array}{ccc} \text{一} & \text{二} & \text{三} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{一} \\ \text{二} \\ \text{三} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{歸} \\ \text{還據} \\ \text{點} \end{array}$$

並令極限矩陣

$$P^\infty = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 1-a-b & 1-a-b & 1-a-b \end{bmatrix}.$$

由 $PP^\infty = P^\infty$ 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(1-a-b) = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}\text{；}b = \frac{1}{2}.$$

因此

$$P^{\infty}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$ □

【例題 4】

某地區有甲、乙、丙三家牛乳供應商，根據調查顯示：甲公司每年保留 60 %的顧客，而轉向乙公司與丙公司訂購的顧客各占 20 %；乙公司每年保留 40 %的顧客，而轉向甲公司與丙公司訂購的顧客分別占 40 %與 20 %；丙公司每年保留 20 %的顧客，而轉向甲公司與乙公司訂購的顧客分別占 60 %與 20 %。若目前甲、乙、丙三家公司的市場占有率分別為 20 %、20 %、60 %，且顧客總人數不變。

⑴ 試問三個觀察期之後，這三家公司的預計市場占有率分別是多少？

⑵ 已知牛乳供應市場會趨於穩定，試問其穩定狀態為何？

【解】

⑴ 由題意知牛乳佔有率的轉移矩陣為

$$\begin{array}{cc} & \text{今年} \\ & \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array} \\ P= & \begin{bmatrix}0.6&0.4&0.6\\0.2&0.4&0.2\\0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{甲}\\\text{乙}\\\text{丙}\end{array}\text{次年}\end{array}$$

所以經一個觀察期後為

$$P^{1}\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0.6\\0.2&0.4&0.2\\0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.56\\0.24\\0.20\end{bmatrix}$$

經二個觀察期後為

$$P^{2}\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0.6\\0.2&0.4&0.2\\0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.56\\0.24\\0.20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.552\\0.248\\0.200\end{bmatrix}$$

經三個觀察期後為

$$P^{3}\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0.6\\0.2&0.4&0.2\\0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.552\\0.248\\0.200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5504\\0.2496\\0.2000\end{bmatrix}$$

故三個觀察期後，甲、乙、丙三家公司的預估占有率分別為 55.04 %、24.96 %、20 %。

⑵ 設穩定狀態時為 $X=\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}$,

因為呈穩定狀態，所以 $PX=X$，得到

$$\begin{cases}0.6a+0.4b+0.6(1-a-b)=a\\0.2a+0.4b+0.2(1-a-b)=b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-0.2b+0.6=a\\ \quad 0.2b+0.2=b\end{cases}$$

解得 $a=\frac{11}{20}=55\ \%$，$b=\frac{1}{4}=25\ \%$,

故牛乳供應市場達到穩定時，甲、乙、丙三家公司的占有率分別為 55 %、25 %、20 %。 □

伍、班佛法則

1938 年，奇異公司的物理學家班佛提出有名的統計規律…班佛法則（Benford law）：很多經濟數據的首位數字分布呈現很好的比例規律，這些數據的第一位數字為 D ($D=1,2,3,4,5,6,7,8,9$)所占的比例約為

$$\log_{10}(1+\frac{1}{D}).$$

因為自然產生的數據大都符合班佛法則，又檢驗數據的第一位數字分佈是省時又經濟的一件事情，所以班佛法則已成為檢查資料庫的統計數據是否造假的利器。 ■

附註：

轉移矩陣是不一定會收斂的。例如，下面這個轉移矩陣

$$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

滿足 $B^2=I^2$，故得

$$B=B^3=B^5=B^7=\cdots=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$B^2=B^4=B^6=B^8=\cdots=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

因此，轉移矩陣 B 的次方 $B^1, B^2, B^3, \cdots$沒有極限。

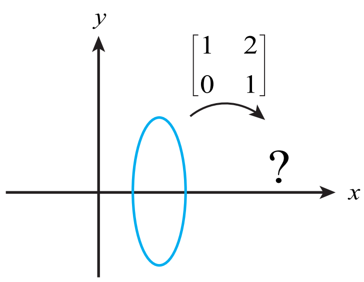
交流道

【問題】

推移變換為什麼叫「推移」？

【說明】（曾憲錠／竹北高中）

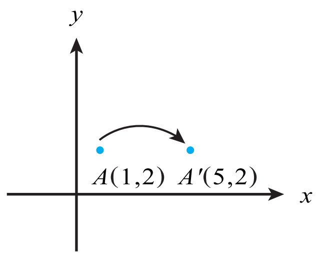
如果隨便給一個平面圖形（例如圖 1 中的燒餅形狀），要求學生對此圖形進行平移、伸縮、鏡射、旋轉及推移等五種變換，最容易產生困難的大概是推移。事實上，很多學生都能夠輕鬆地描繪出一個圖形經過平移、伸縮、鏡射、旋轉後的樣子，但對於推移後的圖形，卻不知道該如何下筆描繪。



▲圖 1

如果學生不曉得如何下筆描繪推移的結果，那他對於推移的理解可能連一半都不到。「矩陣 $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ 代表 x 方向的推移」這句話說起來容易，但說的人曉不曉得自己在說什麼就大有疑問了。

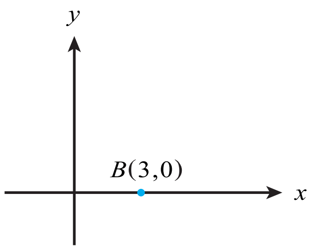
以下我們將以 $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ 或 $(x , y) \to (x + 2y , y)$ 作為例子，看看這個「變換」到底是怎麼運作的？（我們之所以刻意用「變換」代替「推移」這兩個字，是希望透過以下的討論，同學能自然而然產生「推移」的感覺。）首先看看 $(x , y) \to (x + 2y , y)$ 作用在一個點的效果，例如，它會把 $A\,(1 , 2)$ 變換到 $A'\,(1 + 2 \cdot 2 , 2) = (5 , 2)$。



以上的觀察重點是：

不改變「高度」（y 坐標），但會把 x 坐標水平移動一段距離，水平位移的大小與所在的高度有關，剛好是高度的 2 倍。

我們不妨再試試看另一個點 $B\,(3 , 0)$，看它會被 $(x , y) \to (x + 2y , y)$「搬」到什麼地方？



首先，這個變換不改變 y 坐標，所以變換後的點仍然落在 x 軸上。然後，這個變換再把 x 坐標水平移動一段距離——高度的 2 倍，也就是

$2\cdot 0=0$，因此，連 x 坐標也不變。對於這個現象，有些人喜歡如此描述：

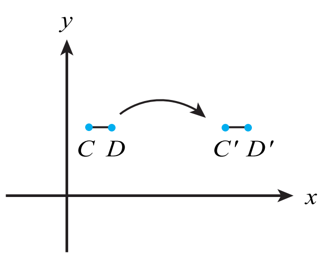
$(x, y)\to(x+2y, y)$ 這個變換「搬不動」$B(3, 0)$這個點；

有些人喜歡另一種描述：

$B(3, 0)$ 是 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 這個變換的一個固定點(fixed point)。

事實上，x 軸上的每一點都是 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 的固定點。

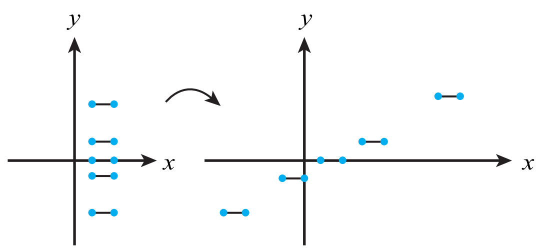
現在，我們試著處理稍微複雜一點的圖形：水平線段，例如以 $C(1, 3)$ 與 $D(2, 3)$ 為端點的線段。



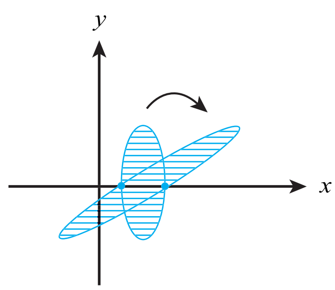
既然 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 不改變高度，所以，線段 CD 在變換之後仍然落在相同的水平高度上。接下來，CD 上的每個點都會發生相同的水平位移：$2\cdot 3=6$，例如，C 會被搬到 $C'(1+6, 3)=(7, 3)$，而 D 會被搬到 $D'(2+6, 3)=(8, 3)$，在變換前後，線段的長度都是 1。事實上，我們發現：

$(x, y)\to(x+2y, y)$ 不改變任何水平線段的長度，它只是把線段水平移動一段距離，水平位移的大小與所在的高度有關，剛好是高度的 2 倍。

因此，距離 x 軸越近的水平線段，其水平位移越小；特別地，落在 x 軸上的水平線段不會產生位移，它是 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 所搬不動的圖形。另外，在 x 軸上方的水平線段會往右移動，但在 x 軸下方的水平線段則會往左移動。



雖然目前只曉得 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 如何對「點」或「水平線段」動手腳，但我們將再次見識到以簡馭繁的魔力：我們不妨把圖中像燒餅一樣的圖形看成是一個一個水平線段的聯集，若要曉得 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 如何搬動燒餅，只要先考慮 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 如何搬動每一個水平線段，再把搬動的結果取聯集即可。



現在，我們要為以上的討論下個直觀的結論：

$(x, y)\to(x+2y, y)$ 要搬動任何圖形之前，先把該圖形看成是一個個水平線段所構成的集合，每個水平線段好比是一枝長度固定的牙籤，於是 $(x, y)\to(x+2y, y)$ 的作用就是：

1. 把位於 x 軸上方的牙籤往右推，離 x 軸越遠的牙籤被推得越右邊。

2. 貼在 x 軸上的牙籤保持不動。

3. 把位於 x 軸下方的牙籤往左推，離 x 軸越遠的牙籤被推得越左邊。

（既然這個變換只是在移動牙籤，而牙籤的長度又是固定的，所以變換前後的面積保持不變）

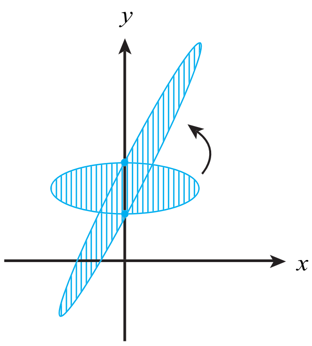
類似的推論過程也適用在 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $(x, y) \to (x+2y, y)$ 這樣的變換。事實上，它的作用就是：

1. 把位於 y 軸右方的牙籤往上推，離 y 軸越遠的牙籤被推得越上邊。

2. 貼在 y 軸上的牙籤保持不動。

3. 把位於 y 軸左方的牙籤往下推，離 y 軸越遠的牙籤被推得越下邊。

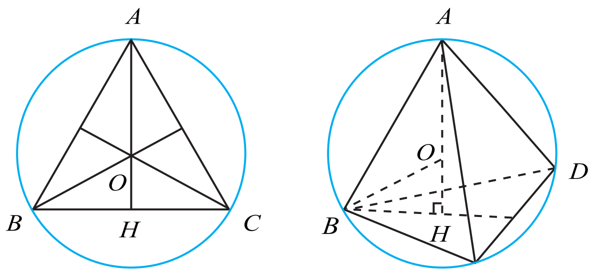
（如下圖）



看到這裏，如果要您為這類型的變換取個名字，除了「推移」之外，您是否還想得出更貼切的名稱呢？

【問題】

正三角形的外接圓心剛好也是垂心以及重心，因此，正三角形的外接圓心「把高分成 2 : 1」。那麼，正四面體的外接球心會不會一樣「把高分成 2 : 1」呢？



$\overline{AO} : \overline{OH} = 2 : 1$　　$\overline{AO} : \overline{OH} = ? : ?$

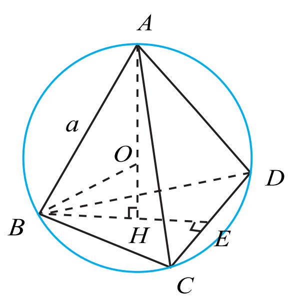
【說明】（李晉媛／台北市立大同高中）

首先，讓我們提一些合乎直覺的事實作為討論的基礎：

正四面體的高會通過外接球的球心，也會通過底面的重心。

（大部分的學生不會質疑這件事，我們姑且跳過嚴格的證明，留給有興趣唸數學系的學生去想一想。）

或許是因為重心將中線分成 2 : 1 的經驗太深刻，或許是受到自己手繪的立體圖形所誤導，不少學生會以直覺回答上述的問題：「是的，正四面體的外接球心把高分成 2 : 1」。可惜，直覺雖然在開頭對了，卻在這裏出了差錯。正確的比例應該是多少呢？



從上圖可以看出，

$$\overline{BH}=\frac{2}{3}\,\overline{BE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a\,.$$

而正四面體的高為

$$\overline{AH}=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}a\,.$$

接下來，在直角△ BOH 中，

$$\overline{BO}^2=\overline{BH}^2+\overline{HO}^2$$

$$\Rightarrow R^2=(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2+(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2\,,$$

（我們將外接球半徑以 R 表示）

將算式整理如下，

$$R^2=\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}aR+R^2$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{6}}{3}aR=a^2$$

$$\Rightarrow R=\frac{3}{2\sqrt{6}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a\,.$$

因此，正四面體的高與外接球半徑的比為

$$\frac{\sqrt{6}}{3}a:\frac{\sqrt{6}}{4}a=4:3\,.$$

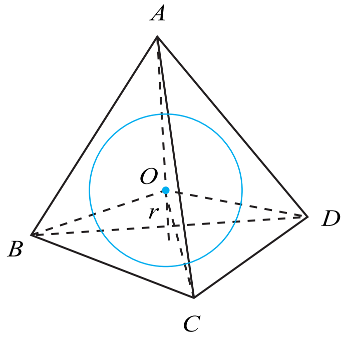
也就是說，正四面體的外接球心將高分成兩段，比例是 3 : 1，而不是 2 : 1。

說起來真巧，今年（93 年）數學甲指考剛好出了一題（多選第 3 題），可以把這裏所談的觀念派上用場。該題的背景如下：

空間直角坐標系統內的單位球，內接一個正四面體，其中一個頂點的坐標是 $(0,0,1)$，另有一個頂點的坐標為 (a,b,c)。

既然知道正四面體的外接球心把高分成 3 : 1，所以，球心到底面的距離是半徑的$\frac{1}{3}$，也就是$\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$，因此，$c=-\frac{1}{3}$ 。又頂點落在球面上，即 $a^2+b^2+c^2=1$，因此，$a^2+b^2=1-c^2=\frac{8}{9}>\frac{1}{9}=c^2$.

伴隨著外接球，最自然的疑問就是內切球了。外接球與正四面體相交於頂點，內切球則與正四面體相切於面，因此，內切球心到四個面是等距的，剛好都是內切球的半徑 r。現在，讓我們把正四面體分割成共頂點的 4 個四面體，共同的頂點就是內切球球心。



如果直接計算正四面體的體積，我們得到

$$\frac{1}{3}\times底面積\times高=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\,.$$

如果分開計算 4 個小的四面體，再求其和，我們得到

$$4\cdot(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r)=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2r\,.$$

既然以上兩種方法都在計算同一個正四面體的體積，算出來的結果是相同的，因此，

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2r\,.$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a\,.$$

最後，讓我們回顧一下外接球的狀況：外接球心到底面的距離為高的$\frac{1}{4}$，即$\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$——這剛好是內切球心到正四面體各面的距離。這意味著，正四面體外接球與內切球的球心是同一點。

空間中的畢氏定理

條條道路通羅馬

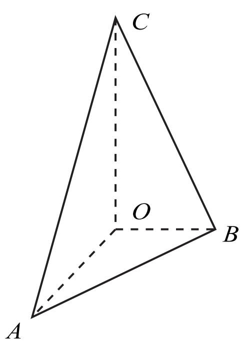
◎謝銘峰／彰化高中

一、空間中的畢氏定理

什麼是空間中的畢氏定理呢？

空間中的畢氏定理：

在空間中任給一個四面體 $OABC$，當四面體的三錐面 OAB、OBC、OCA 兩兩互相垂直時(也可以說三個邊 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 兩兩互相垂直，如圖 1)，



▲圖 1

則 $\triangle ABC$ 之面積平方等於另三個三角形 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OAC$ 之面積平方和，即：

$$(\triangle ABC)^2=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OAC)^2$$

我們稱此性質為空間中的畢氏定理。

回顧畢氏定理，談的是平面上直角三角形的邊長平方關係，而空間中的畢氏定理，談的則是空間中直角四面體的錐面積平方關係[1]，看起來大有推廣的意思。不過，空間中的畢氏定理其實只是畢氏定理的應用而已。

以下筆者以高中學過的各種工具來證明此定理，讓我們一起來體會原來高中所學的幾個工具之間，有著如此密切的關係。

二、海龍公式

要證明空間中的畢氏定理，第一個想到的自然是海龍公式，因為海龍公式就是一個最美麗的面積公式[2]。

設 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$，

則

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-\overline{AB})(s-\overline{BC})(s-\overline{CA})}\ ,$$

其中

$$s=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2},$$

且 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$、$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$、$\overline{AC}=\sqrt{a^2+c^2}$.

將 $\triangle ABC$ 平方得到

$$(\triangle ABC)^2=s(s-\overline{AB})\,s(s-\overline{BC})\,s(s-\overline{CA})\ ,$$

然後經過冗長的計算可以得到

$$(\triangle ABC)^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$$（真的嗎？你不妨試試看！）

$$=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OAC)^2.$$

經過代數運算，我們總是可以驗證想要得到的結果，問題是，冗長的計算過程讓人厭煩，同時，也沒有辦法從證明的過程中發現任何的幾何

1. 直角四面體不是一個正式的名詞，此處請讀者暫且用之。
2. 海龍公式其實是圓內接四邊形的面積公式之特例，仔細觀察一下，$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 是不是很有對稱美呢？

性質（其實也算有啦！因為海龍公式可以從餘弦定理加以證明，而餘弦定理是畢氏定理的推廣）。因此，我們不得不換個方式囉！

三、四面體體積

觀察一下這一個四面體，其體積[3]等於

$$\frac{\triangle ABC \cdot h}{3}=\frac{\triangle OAB \cdot c}{3}=\frac{abc}{6},$$

其中 h 是原點 O 到平面 ABC 之距離，

根據點到平面距離公式：

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

（因為，平面 ABC 之三個截距分別為 a, b, c，因此平面方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，此乃截距式也）

因此，$(\triangle ABC)^2=\frac{a^2b^2c^2}{4h^2}$，

將 $h=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$ 代入計算，

很快的發現：

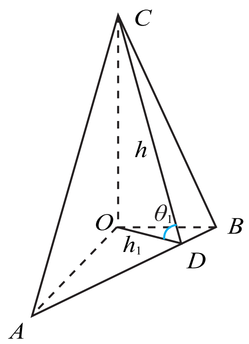
$$(\triangle ABC)^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$$
$$=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OAC)^2.$$

透過這一個方法，我們發現要證明空間中的畢氏定理變得簡單多了（好計算），但是依舊不是很明顯的可以看出來和平面上的畢氏定理之間的關係。當然，眼尖的你必然發現，點到平面的距離公式就是畢氏定理的應用，因為，點到平面距離公式的證明來自於內積，而內積就是餘弦定理坐標化的結果。

四、方向角

再換個方式看看可不可以更直接或簡單一點。

仔細觀察圖 2，我們發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle OAB$ 有個共同邊 $\overline{AB}$，因此，它們的面積比將會是高的比。



▲圖 2

因此，如圖 2，

$$\triangle ABC : \triangle OAB = h : h_1$$
$$= h : h \cdot \cos\theta_1$$
$$= 1 : \cos\theta_1.$$

根據相同的原理，

$$\triangle ABC : \triangle OAC = 1 : \cos\theta_2、$$
$$\triangle ABC : \triangle OBC = 1 : \cos\theta_3.$$

那空間中的畢氏定理

$$(\triangle ABC)^2=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OAC)^2$$

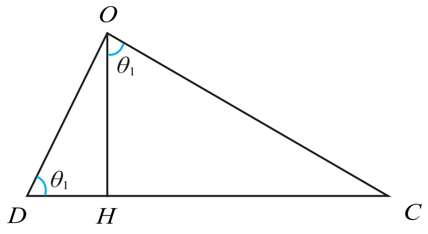
就變成

$$1=\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3.$$

這一個公式看起來很面善，是空間中向量方向角所具有的餘弦關係式，可是，$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 是方向角嗎？

再回去看看圖 2，從 $\triangle ODC$ 之點 O 向 $\overline{DC}$ 作垂線，交於 H 點，$\overline{OH}$ 將會是此四面體以 $\triangle ABC$ 為底邊的高，如此，當我們看 $\triangle ODC$ 時，可以得到：$\angle COH=\angle HDO=\theta_1$，換言之，$\theta_1$ 是高 $\overline{OH}$ 與 $\overline{OC}$ 的夾角，如果將 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 看成坐標軸，那 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 就變成向量 $\overrightarrow{OH}$ 的方向角了。

3. 錐體體積雖然不是高中標準課程，但是，透過分割的方法，其實是很值得介紹的內容。



▲圖 3

於是空間中的畢氏定理其實在述說著：直角四面體的斜面投影成三個兩兩互相垂直的三角形，這一個投影關係可以改變成「高與三垂直邊的方向角公式」。

因為方向角公式就是說明向量的邊長可以透過兩次投影由其在各坐標軸的投影長平方和所計算出來，因此，空間中的畢氏定理當然是原畢氏定理的一個應用。

這一個證明方式簡單多了，沒有冗長的計算過程卻蘊含許多美妙的幾何變換，有令人感到「阿哈」的驚嘆。當然，這裡有一個重要的關鍵：為何 $\overline{OH}$ 會是四面體以 $\triangle ABC$ 為底邊的高，這實在是一個很好的問題，我們可以用高中空間幾何課程裡的「三垂線定理」加以證明（就留給親愛的讀者您試試看囉）。

透過這樣的證明方式，我們不僅用上了許多課程裡的內容，也將它們之間各關係結合起來，是不是讓我們有較多的感覺呢？

五、美妙的畢氏定理

高中的幾何課程其實是將畢氏定理以多樣的風貌展現。例如透過廣義角將定理推廣成餘弦定理，把任意的三角形之邊角關係作詳盡的描述，例如海龍公式，去掉「角的條件」後就變成美妙的面積公式，例如內積，將其坐標化之後用 $x_1x_2+y_1y_2$ 可以輕易的計算出內積值 $(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta)$ 來。事實上在三角函數課程一開頭，即將畢氏定理化成 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，如果我們將公式改寫成 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=1$ $(\theta_1+\theta_2=90°)$，可視為平面上的方向角公式（或說是另一個餘弦定理），推到空間去就成了 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$，只不過使用兩次的 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=1$ 罷了。

畢氏定理的源頭是三角形相似性質，透過如圖 3 的子母直角三角形，就可以很輕易的證明畢氏定理（該如何證明呢？請讀者大人先想想看）。將子母直角三角形變成一般三角形就變成投影定理：$c=a\cos B+b\cos A$，如果子母直角三角形可以證明畢氏定理，那投影定理就可以推出餘弦定理，當然，這又是另一個有趣的問題！

幾何性質代數化，是畢氏定理將直角關係化成平方關係的一個主要貢獻，而代數化的過程引進坐標，又是一個進步的里程碑。於是內積的計算方式 x_1x_2, y_1y_2 又是另一個美妙的結果。以下我們用坐標化的方式將空間中的畢氏定理再證明一次。

六、外積

外積並不是高中課程裡的標準內容，但是，外積的由來並不令人意外，以下我們簡單的加以敘述。

外積：任給兩個空間向量

$\overrightarrow{a}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{b}=(a_2,b_2,c_2)$，

則向量$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

即稱之為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之外積，記為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$。

外積可以說是一個定義，但是其實是有由來的。在空間向量的單元裡，求法向量是相當重要的一件事，如果給兩個向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, b_1, c_1)$、$\overrightarrow{b}=(a_2, b_2, c_2)$，我們如何找出其共同的垂直向量（法向量）呢？

不妨令 (x, y, z) 和向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均垂直，則 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$，將此方程式視為 x, y 兩變數的方程式，則透過克拉瑪公式可以很快的得到：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,$$

於是，整理一下，

$$x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

將這一個比值換成向量的型態就是外積的定義，同時，這一個向量的長度（很意外的）就是 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出之平行四邊形的面積。

說這是巧合，應該對吧！或者說數學就是這樣美麗。如果你知道這一個性質，那再回顧空間中的畢氏定理。將 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 放在 x, y, z 軸的正向上，A、B、C 坐標為 $(a, 0, 0)$、$(0, b, 0)$、$(0, 0, c)$，$\triangle ABC$ 則由向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{AC}$ 所張出，因此 $\overrightarrow{AB}=(-a, b, 0)$、$\overrightarrow{AC}=(-a, 0, c)$，根據外積可得

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix}^2},$$

即

$$\begin{aligned}(\triangle ABC)^2&=\frac{1}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\\&=(\frac{ab}{2})^2+(\frac{bc}{2})^2+(\frac{ac}{2})^2\\&=(\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OAC)^2.\end{aligned}$$

證明過程是不是又變簡單一些了呢？雖然（好像）完全看不出和畢氏定理之間有何關係（真的看不出來嗎）！

七、感覺

一個有趣的性質，不僅有許多令人驚奇的證明方法，還將學過的內容綿密的串聯起來，如果說，高中空間幾何課程裡要選一個有趣的性質當作代表，我會建議「空間中的畢氏定理」。

現在的您是不是在想，外積和畢氏定理有何關係呢？其實代數化之後，原先的幾何性質就不見了，喔！不應該說是不見了，而是，不再有人重視了，這是很可惜的事情。

畢氏定理本身就是一個代數化的幾何性質，老實說，從畢氏定理的代數形式，並不容易看出所蘊含的幾何意義，雖然畢氏定理有高達 380 個以上的證明方法，但是，哪一個方法讓我們有十足阿哈的感覺呢？又除了 $a^2+b^2=c^2$ 這一個式子外，什麼是畢氏定理的內涵呢？事實上，畢氏定理說明的是：一個直角三角形可以分割成兩個小的直角三角形，因此，最大三角形的面積等於兩個小的直角三角形的面積和，於是：$a^2+b^2=c^2$（阿哈！原來畢氏定理是分割定理，證明方法就在 $a^2+b^2=c^2$ 這一個式子上，真是美妙)。而畢氏定理的逆定理則說到：只有直角三角形可以分割成兩個小的「相似三角形」喔！所以，事實上，畢氏定理就是相似形定理的應用，畫成圖形當然就是有名的子母直角三角形。

學習數學應該要有感覺，有感覺才有美感，才有感動，也才深入我心，不是嗎？（如果你看出來外積和畢氏定理之間的關係，不妨來信和我一起分享[4]哦！）

4. 筆者網站:bee 美麗之家 http://web.chsh.chc.edu.tw/bee

高效能學習法之一

如何有效率的學習

◎陳子軒／大直高中

前言

俗話說：活到老，學到老。人的一生中都在學習。影響學習的因素很多，包括系統、方法甚至心理的因素都有，尤其是一個學生在求學階段，面對課業、生活的壓力，如何做有效的掌握，都會影響學習的效果。而人生的學習更難，因為很多沒有標準答案，因此如何培養好自我的學習能力就很重要。

如何在人生的各個戰場經營得宜，如何創造雙贏局面，如何在主觀的人際及客觀的事物間取得平衡，EQ與IQ的同步提升，視為提升競爭力的根本之道，而這其中尤以代表心智成長的EQ，在這情緒病愈來愈多的年代裡顯得格外重要，高效能學習法因而誕生。

本文大綱

觀察力的練習 — 同步提升IQ與EQ，不浪費時間的學習，也不浪費學習的時間

記憶力的練習 — 介紹各式記憶法、分鏡表及經驗談

解析力的練習 — 速讀的訓練，介紹系統分析如何應用在教學策略以及學生讀書計畫擬定、執行的應用

愛與接納的練習 — 愛的重要性，如何避免情緒的干擾

觀察力的練習

是一種平行搜尋重點的練習、專注力的練習、持續力的練習、客觀的練習、直覺的練習（不假思索的練習）。

兩種模式

循序漸進的模式：

適用於有固定目的並已有固定方法可循的事物，如抄寫一篇文章，計算一個數學問題。

限制：一次只能做一件事，且不能掉換順序。

平行處理的模式：

是一種同步運作的能力，如超級大電腦般，具有搜尋、並用及整合的能力，適用於創作、解決一個難題、高層決策、人際關係。

如：開車時手握方向盤，另一手排檔，腳踩煞車和油門，還輕鬆的和別人聊天，有時還可以講手機，這就是平行運作的模式。

一般人只對熟悉的事情可以自動採取平行運作的模式，對陌生的事情就不易處理了，如同剛學開車時，常常是記得這項動作就忘了那項動作。等到都熟練時，才能平行運作，運用自如。學一種球類運動也是如此。

又如武俠小說中被一群武林高手圍攻時，該如何是好？如果採用循序處理的模式，可能就完蛋了。

同時提升 EQ 與 IQ 的能力

觀察力所要訓練的即是平行運作的能力，能協助我們快速而精準的對沒有固定模式的事物，瞬間掌握問題的關鍵。研究發現，這種直覺的訓練可以幫助學生看清自己的優缺點，及早擬定改進的策略，對課業及人際關係都有很大的好處，可同步提升 EQ 與 IQ。

專注力的持續

一般人的「大約專注時間」最多不會超過 30 分鐘，而「嚴格專注時間」不超過 30 秒，甚至更短，透過觀察力的練習，可以提升專注時間，尤其是嚴格專注時間。

中國傳統中有一門功夫叫做太極拳，動作非常慢，但是卻是非常上乘的武功，因為太極拳本身不只是在練招數，它是透過很慢的動作進行專注的訓練，等到意念和動作合一時，就會發揮非常大的功效。

而觀察力是一種專注力的持續訓練。一般學生就算真的很認真在書桌前唸一小時的書，但因為專注力無法持續，所以浪費在無謂想法上的時間可能就佔了讀書時間的大部分，而透過觀察力的訓練可以讓他因為沒有浪費一分一秒而在短時間就念完書。

管理自己的訓練

我們都有訂讀書計畫的經驗，但真正能按照讀書計畫做到底的人真是少之又少，原因是生活中有很多的變數，如突然有事情插進來，或今天不想做，前者可將讀書計畫用 pert（也就是網圖）的方式解決，後者是情緒的問題，而情緒一般都有醞釀的時間，我們往往是等情緒起來才知道，而觀察力的練習能讓我們在情緒剛開始醞釀時就察覺而能加以疏導。

觀察力要如何訓練呢？

訓練方法

第一階段：利用每天用餐時，客觀的觀察自己吃飯的動作開始。（不花一秒鐘的練習）

什麼是客觀呢？就好像沒事時，悠閒的看著路上來來往往的行人，一切事情盡入眼簾，但我們並沒有去干涉別人的行為，也沒有很大的情緒起伏，只是看著，而現在只是將觀察的對象回到自己身上而已。

注意事項：

筆者曾針對台灣、新加坡、香港、紐西蘭等地小六到高一約一百多名的學生進行四個星期到五個月不等的觀察力培養訓練，請他們每天利用三餐吃飯時做觀察力的訓練，每天紀錄心得，將一些練習時容易產生的狀況，整理如下：

A. 觀察動作時，只是輕鬆而專注的觀察而不做任何的評判。

B. 客觀而全面性的觀察、不鎖定某一特定部位，也不預設下一個動作。

C. 觀察的對象是自己的動作而不是別人或桌上的菜。

D. 一但發現自己離開了觀察，也就是想到別的事情時，就立刻再回到觀察本身。

一般的學生大約經過一個半月的練習，就能由起初的不適應慢慢的了解什麼是觀察，少數學生可以在二到四週掌握到如何觀察，漸漸養成觀察的習慣。大多數同學則可在一至二個月間掌握到觀察的重點，當然也有人半途而廢，經過這些時間的訓練，可發現觀察力敏銳的同學，開始覺得讀書變得簡單了，因為一方面讀書速度變快，而且瞬間抓到重點的能力也變強了。

※建議老師們可以先著手練習，如此在訓練學生或自己生活方面都會比較能得心應手。若練習

上遇到有問題，可透過 E-mail：chentf@giga.net.tw 與我連絡。

第二階段：在生活中的任何片段，觀察自己的動作。

當然最好是在不需要從事複雜思考的時候，久而久之，慢慢就能觀察到自己的言語、想法，而能在情緒來臨時，仍然不受情緒的干擾，能停止一些無意義的想法，從而能將所有時間真正用於所進行的事情上。

例如很在意成績的學生在準備考試時，常常會想「我萬一考不好怎麼辦？」「這次我要是能考多少分該有多好？」而且會一直想下去，不知不覺很多時間過去了，甚至本來要唸一小時書，卻可能讓這些想法或做別的事（如翻冰箱、看電視）的時間佔去了 50 分鐘，但是這些想法卻和考好成績這件事其實沒有多大的相關，旁觀者都知道真正要達到「考好成績」的目的，應該就是專心在功課上，但是當我們在做一件事情時，卻有時會失去了重點，觀察力的訓練就是要去掉浪費時間的部分，從而提高學習效率，如上例，去掉浪費的時間，原本要讀一小時的功課，10 分鐘即可解決，這就是高效能學習法的第一步。

記憶力的練習

這是一些常用的記憶法，可讓學生定期練習，降低讀書的困難度。

印象式記憶法

選一篇約 50～100 字的文章，用正常的速度看過一遍，然後蓋起來，將剛才所看到的印象紀錄下來，如是者三次，再換文章做同樣的練習，每天一篇，大約經過 2～3 個月，一段不困難的文章，看一遍就記住了，然後持續 1～2 星期，再增加至兩段，如此進行下去，一般學生約 2～3 年，一頁 A4 大小的文章可過目不忘，但此種訓練法較難，並不容易練習。

練習範文：

「魔鏡啊！誰是世上最美麗的女人」，這傳說已久的神話，多少年來不斷的述說著白雪公主的美麗，巫婆的不美麗，然而大家都知道，真正讓白雪公主美麗的是她的愛心，而讓巫婆永遠只能呈現醜陋一面的是 —— 她失去了愛心。

圖像式記憶法

將一段文章根據內容，逐句轉成圖像記憶，然後再將圖像連結在腦海中，爾後看著腦海中的圖像再將文字還原。此種記憶法，取決於圖像和文字的連結性愈好，則還原能力愈強，但圖像也不可太多、太細，以免影響圖的連結。對圖形的設定每個人可不相同，重點是以好用、好記為原則。

練習範文：

一隻蝴蝶在某地拍一下翅膀，可能造成另外一地的龍捲風。這是由美國知名的氣象學家 Edward Lorenz 提出的一個問題，稱為「蝴蝶效應」。意思是如果初始條件值差一點點，可能在結果上是天壤之別。

第一圖：分成兩半，左邊是一隻蝴蝶拍翅膀，畫一個箭頭到右邊，右邊是龍捲風。

第二圖：畫一個人寫上 Edward Lorenz，手往上指一個問號

第三圖：蝴蝶效應寫在左邊，條件 A 和 B 差一點點，分別從 A 和 B 拉兩條線差很多。

關鍵字記憶法

隔幾句選出可聯想出整句的詞句，將它們單獨抄出來，編成故事記憶。再反覆練習詞句和整句的連結。這種記憶法剛開始有點慢，熟練之後就會很快了。

練習範文：

任何事物的改變都有一個臨界點，超越了臨界點，就產生了化學變化，再也回不來了。現在我們即將逼近臨界點，未來將何去何從，全人類都將面臨考驗，是尊重或是殘害的選擇，是愛或仇恨的選擇，是內在心靈深處光明與黑暗的天人交戰的選擇。

關鍵字：臨界點化學變化考驗尊重殘害愛仇恨光明黑暗

再用一個故事將這些字串起來記即可。

回想式記憶法

利用零碎時間，如等公車、上廁所、散步等，回想上過課的內容，回想不起來的，一拿到課本，立刻做記號，此法不但做到概念統整，而且將熟悉和不熟悉的課文分開，雙倍節省讀書時間，惟剛開始練習時會稍微辛苦。

掛勾式記憶法

當一次要記憶數十個名詞時可用，先將自己熟悉的十個名詞（通常取身邊如房間的擺設）排好順序後，再將要記的名詞一次十個依序掛在已選好的十個名詞下面，掛的時候上下的名詞可想一個故事將他們連接起來（愈誇張愈好）如本來一號是檯燈，下面要掛上雨傘，就可編一個故事說：檯燈太亮了，害我要用雨傘擋住光線。如此的記憶法稱為掛勾法。

歸類式記憶法

如電話號碼：0921 365 911，分為三組來記比單獨的記 10 個號碼要容易的多，而同一組的可與經驗值相關較好記。

諧音式記憶法

如 28825252 餓 爸爸 餓 我餓我餓

解析力的練習

這是一種能將資訊快速整合起來的能力，選一篇文章，開始閱讀，重點是不要停留在某處思考，及練習用圖像掌握重點。

練習範文：

好書介紹

書名：要改變別人，先改變自己

作者簡介：Joseph F. Newton 博士，是聞名美國的心靈演說家，擅長以引人入勝的小故事，探討人生哲理與日常生活議題。

內容簡介：

這是一本很有意思的小書，書雖小，卻一針見血的指出現代人的迷思。我們常抱怨老闆不公平，工作太多，孩子太吵、太壞、成績太差，丈夫（太太）不夠愛自己，朋友不夠熱心，街道不夠乾淨…等，卻忽略了該改變的是自己，只要自己心中的想法改變了，世界便會因此而更好。

本書用了六章各十篇的小品來闡述改變自己的重要性及方法，這六章分別是〈左右自己生命的浮沉〉、〈偏見是無形的殺手〉、〈麻煩愈少幸福愈多〉、〈看書是解決緊張的妙方〉、〈替自己找到更好的遠景〉、〈不要急著妄下論斷〉等。

每一頁的小品都敘述一個自己，一個能從迷惘、徬徨、失敗轉為清明、勇敢和成功的自己，每一字每一句都有機會成為您心靈書房珍藏的寶貝，當這些寶貝化為實際的行動哲學時，每一個自己都將慢慢覺醒，願意面對和承擔生命所載負的一切時，於是，將有更多人心靈書房的檯燈不知不覺的被點亮了。

※請用 1 分鐘看完，並說出大意（請以條列式列出或用漫畫的分鏡型態畫出）

如何利用系統分析來修正學習上的問題

例如：一位學生考完一份試題，不甚理想，如何幫助他找出問題所在及改進策略？

問題界定：希望下次考試中能獲得理想成績。

原因分析：1.作息不正常，以致影響考試的思考能力。

2.準備不充分。

3.試題答題分析：10 %不解題意；15 %概念不清；15 %計算錯誤；其餘答對。

模式建構：每天規律生活，提早準備考試，對於概念多思考，限時間做完一定題目，看看準確率。

執行控管：建立規律生活、讀書計畫、限時間評量次數的計畫評核(PERT)。

這樣的四步驟模式可用於解決所有問題，老師平常可以在課堂上與學生一起分析他所遇到的問題，生活上或交友上的問題亦可。重點是教他如何運用自己已有的資源，解決所遇到的問題。

愛與接納的練習

這是生活中最重要的訓練，不但是一個好教師必須要有的人格特質，也是我們教育學生的方針喔！同時還是師生關係融洽的來源呢！以下小語是個人的一些體會，與大家共享：

・在愛與快樂的環境中學習，效果最好
・服務、合作才會帶來快樂
・愛別人就是愛自己，只有愛才能讓自己成長
・做自己的主人，同時接納自己和別人的優缺點
・愛的教育是生命學習的教育
・生命的學習中，沒有標準答案，只有最佳答案
・愛的教育，引導學生認識自己，幫助別人，透過對生命客觀的觀察，找到自己的盲點
・只有不斷幫助別人，自己的問題就會迎刃而解了
・有些人把焦點放在孩子犯錯了要不要處罰他，但卻忽略了真正的重點是愛他
・珍惜的心情，讓一切變得可貴

愛與接納需要長時間的練習，才能真正成為人格的一部分，以下是練習方法，可每天練習，前兩項是意識的訓練法，剛開始從 5 分鐘開始，後兩項可教學生每天做紀錄。

練習方法：

1. 沒事時在心裡默念「我愛每一個人」。
2. 常常想像內心充滿愛心。
3. 隨手做好事，隨手幫助別人。
4. 當看到一個人很討厭時，記得練習：馬上找他的好處。

結語

這套方法有四個練習重點，不可偏廢，需要有恆心的練習，就能讓你的學生成為才能出眾、有同情心和愛心，願意服務社會的棟樑之才，這不就是我們老師教學衷心的期盼嗎？

速度與準度

談高中生的計算能力

◎蘇啟寅／華僑高中

前言

多年以來，關於數學學習的文獻都指出「計算能力與數學能力的相關並不高」，相信數學老師也同意這個看法。加上大學入學考試中，計算複雜的考題已逐年減少，「計算能力」的重要性似乎也逐漸褪去。但是，如果以在校學習的情況觀察，「計算能力固然與數學能力的相關不高，不過它與數學成績的相關倒是很高」。尤其許多學生經常使用「慢又笨拙」的方法計算，不但容易出錯影響成績，更抹煞了學習的興趣。因此，適度地指導學生計算方法，還是有它的必要性。

國內大學入學考試一向不准考生攜帶計算工具（例如計算器 calculator），未來似乎也不太可能開放。由於數學考試時間為 80 分鐘，題數約在 14 題上下（93 年指考數學甲有 12 題、數學乙為 13 題；92 年指考數學甲共 12 題，數學乙則為 16 題），平均每題的解題時間大約只有 6 分鐘。即使是強調不以複雜計算為主的試題，計算能力欠佳的考生還是可能因缺乏自信，而一再重複計算（不是驗算），耽誤作答時機。因此，計算的「速度與準度」，亦即快慢與正確性，就顯得格外重要了。

根據筆者的觀察，計算能力欠佳的學生很容易在加、減法出差錯，其次是乘法的進位（仍然是加法）。因此，我們可以從「加強加減練習、避開複雜步驟、減少計算次數」著手。希望協助程度好的學生提高運算速度，也幫助程度不理想的學生提昇計算的正確度(與速度)，進而達成「當計算不再是負擔時，學生會有更充裕的時間思考數學問題」的目的。

請注意，本文談的是速算而非心算，必要時仍需借助於紙筆。由於正整數運算是「數的運算」之基礎，除非特別說明，否則我們所討論的數都是正整數。

改善加減法的練習

一、熟悉個位之和的個位數字

加法是四則運算的基礎，如果加法容易出錯則減法、乘法、除法堪慮，因此改善計算能力首重加法。

首先寫出兩列各 6 個數字（對齊），例如 472398 與 967283，然後將上、下兩列都看成不相干的六個一位數，依下列步驟進行：

4　7　2　3　9　8
9　6　7　2　8　3

⑴ 由左而右，逐一將第一列與第二列的兩個數字之和的個位數寫在第三列（不要進位）。

4　7　2　3　9　8
9　6　7　2　8　3
3　3　9　5　7　1

⑵ 同步驟⑴，逐一將第二列與第三列的兩個數字之和的個位數寫在第四列（不要進位）。

4	7	2	3	9	8
9	6	7	2	8	3
3	3	9	5	7	1
2	9	6	7	5	4

⑶ 重複進行如前步驟，做完六次（或十次，全班統一即可）後，一起核對最後一列數字。

4	7	2	3	9	8
9	6	7	2	8	3
3	3	9	5	7	1
2	9	6	7	5	4
5	2	5	2	2	5
7	1	1	9	7	9
2	3	6	1	9	4

這個方法首先協助學生熟悉任意兩個一位數相加後的個位數字，在實際練習時，可以逐次縮短作答時間。例如第一次練習時，給予學生 40 秒作答時間，第二次酌減，直到學生可以在 20 秒做完為止。

其次練習二位數的運算，方法與前述略同，唯一要注意的是可以由個位進位到十位，但不要進到百位。請注意，這個練習強調「由左而右」，亦即先看十位數(眼角餘光瞄個位數)再看個位數。同上例，我們將每列當作 3 個二位數處理。

4	7	2	3	9	8
9	6	7	2	8	3

$47+96=1\boxed{43}$, $23+72=\boxed{95}$, $98+83=1\boxed{81}$，故第三列由左而右寫出 439581。

4	7	2	3	9	8
9	6	7	2	8	3
4	3	9	5	8	1

依相同原則，分別寫出第四、五、六、七列。

4	7	2	3	9	8
9	6	7	2	8	3
4	3	9	5	8	1
3	9	6	7	6	4
8	2	6	2	4	5
2	1	2	9	0	9
0	3	9	1	5	4

如果時間充裕，也可以讓學生做三位數甚至四位數的練習，或鼓勵學生自行出題練習。不過要注意的是作答時必須由左向右書寫，否則學習效果大打折扣。

二、使用補數將減法改為加法

假設 a 是一個 n 位正整數，那麼 a 的 10 補數就是 10^n-a，例如 7 的 10 補數是 3，28 的 10 補數是 72。由於加法總比減法快，因此做減法時，可以將被減數改寫成 10 補數（10's complement）再處理。由於補數運算較複雜，此處僅略做簡介。

例：$238-84$ 簡化為 $138+16=154$.

（說明：$238-84=238-(100-16)=138+16=154$.）□

例：$1246-884$ 簡化為 $246+116=362$.

（說明：$1246-884=1246-(1000-116)=246+116=362$.）□

三、善用加減法的運算性質

例：$13+89+27=13+27+89=40+89=129$.

（應用交換律優先處理 $13+27=40$ 以簡化後續運算）

例：$65+43+37=65+(43+37)=65+80=145$.

（應用結合律優先處理 $43+37=80$ 以簡化後續運算）

例：$23-45+69+48-72=(23+69+48)-(45+72)=140-117=23$

（欲加、減的數分別求和，再直接求差）

熟背特殊的平方數、立方數、2 的次方與階乘

通常只要熟悉九九乘法，便足以勝任小學數學課程的各種練習題。但是到了中學階段，便時感不足。面對著千變萬化的各種計算過程，筆者常建議學生「乾脆把 30 以下的正整數平方、10 以下的正整數立方、2 的一次方到十次方以及 10 以下的階乘都背起來」。何故？除了在高一的一元二次函數單元中經常使用平方數以外，在多項式、指數、對數、三角函數以及高二的向量、二次曲線、統計等單元的學習當中，也大量使用這些平方數。

此外，10 以下的立方數、2 的一次方到十次方與 10 以下的階乘也經常出現在解題過程。既然反覆使用這些數據，就建議學生多用點心記住即可。至於大於 30 的整數平方是否要背起來，則宜由學生自己衡量。後面將提供一個簡易的「速算法」，供讀者參考。

活用畢達哥拉斯數

幾何學有一個很重要的基礎定理，也就是大家所熟悉的畢氏定理—「直角三角形兩股平方和等於斜邊平方」。如果我們將滿足畢氏（畢達哥拉斯）定理的三個正整數稱為一組畢達哥拉斯數，則 3 , 4 , 5 與 5 , 12 , 13 這兩組都是典型的畢達哥拉斯數，也是中學生最熟悉的兩組。

由於數學試題的數據多經過特別設計，因此熟悉畢達哥拉斯數的學生，在做與畢氏定理或「兩個整數平方和再開方」有關的計算時，特別得心應手。例如計算兩點距離、複數絕對值、向量長度，或是正餘弦函數疊合、複數化為極式，甚至求向量夾角（含直線夾角）、點到直線距離、分角線方程式等，只要命題者刻意設計數據，對解題者就更有利。

畢達哥拉斯數的生成法則如下（註）：

假設 n 是大於 2 的正整數，則 n 可以產生一組畢達哥拉斯數。

(1) n 為奇數時，將 n^2 拆解為二個連續整數，則 n 與此二整數就是一組畢達哥拉斯數。

(2) n 為偶數時，將 $\frac{n^2}{2}$ 拆解為連續奇數或連續偶數，則 n 與此二數構成一組畢達哥拉斯數。

例如，$3^2 = 9 = 4 + 5$, $5^2 = 25 = 12 + 13$, $7^2 = 49 = 24 + 25$, $9^2 = 81 = 40 + 41$，所以(3 , 4 , 5)、(5 , 12 , 13)、(7 , 24 , 25)、(9 , 40 , 41) 都是畢達哥拉斯數。另一方面，$\frac{4^2}{2} = 8 = 3 + 5$, $\frac{6^2}{2} = 18 = 8 + 10$, $\frac{8^2}{2} = 32 = 15 + 17$, $\frac{10^2}{2} = 50 = 24 + 26$，所以 (4 , 3 , 5)、(6 , 8 , 10)、(8 , 15 , 17)、(10 , 24 , 26) 也是畢達哥拉斯數。

這個法則的證明非常簡單。當 n 為奇數時，令 $n = 2k + 1$，則 $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$，將 n^2 拆解為 $2k^2 + 2k$ 與 $2k^2 + 2k + 1$，再證明 $(2k + 1)^2 + (2k^2 + 2k)^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2$ 即可確認「$2k + 1$, $2k^2 + 2k$, $2k^2 + 2k + 1$ 構成一組畢達哥拉斯數」。至於 n 為偶數時，則令 $n = 2k$，得 $\frac{n^2}{2} = 2k^2$，將它拆解為連續奇數或連續偶數得 k^2-1 與 $k^2 + 1$。其次，$(2k)^2 + (k^2-1)^2 = 4k^2 + k^4-2k^2 + 1 = k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2$，故得證「$2k, k^2-1, k^2+1$ 構成一組畢達哥拉斯數」。

一般而言，熟悉畢達哥拉斯數對解題具有正面的幫助，底下舉幾個應用實例。

【例】

已知三角形△ABC 中，三內角的正弦比 $\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 15 : 17$，則此三角形為銳角三角形、直角三角形或鈍角三角形？請證明你的答案。（75 日社）

說明：

設$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊為a，b，c，則$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=8:15:17$。由於這恰好是熟悉的畢達哥拉斯數，故一望即知它是直角三角形，接下來用餘弦定理（或畢氏定理）證明即可。 □

【例】

已知二直線方程式為$L_1:3x+4y-3=0$，$L_2:7x-24y-7=0$，試求L_1，L_2分角線方程式。

說明：

依據公式列出$\dfrac{|3x+4y-3|}{5}=\dfrac{|7x-24y-7|}{25}$解之即可。此式左右之分母係觀察已知直線的$x$，$y$項係數，並配合畢達哥拉斯數的常識而得。 □

【例】

試求函數$y=f(x)=8\sin x-15\cos x+12$的最大值與最小值。

說明：

由已知的畢達哥拉斯數立即可知

$$y=f(x)=17\sin(x-\phi)+12,$$

故知最大值 29，最小值 -5。 □

整數平方的速算

關於任意二位數平方的速算法則，例如$47^2=2209$，我們使用如下方法計算。

首先在紙上寫下 47，

4　7

其次，心算$4^2=16$，$7^2=49$。在 4 的下方寫 16，7 的下方寫 49。

	4	7	
1	6	4	9

接著用 2 乘以4×7得 56，寫在 1649 下方但往左移一位，將個位數空白（其實是 560）。

	4	7	
1	6	4	9
	5	6	

最後，將第二列與第三列相加（由左而右），得 2209。

	4	7	
1	6	4	9
	5	6	
2	2	0	9

用橫式解釋，就是

$$\begin{aligned}47^2&=(40+7)^2=40^2+7^2+2\times40\times7\\&=1600+49+560\\&=1649+560=2209.\end{aligned}$$

這個方法減少了計算的步驟數，避開了乘法運算同時要做的加法進位，頗受學生歡迎。

其實它的原理十分容易，就是改變公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的書寫習慣，而以$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$替代即可。

順便一提，混雜著有理數與無理數或虛數的運算，也可以使用此法。

【例】

$(-2+\sqrt{3}i)^4$ 的實部為____。（76 日社）

解：

$(-2+\sqrt{3}i)^4=(1-4\sqrt{3}i)^2$　實部為 $4-3=1$

$=-47-8\sqrt{3}i$，　實部為 $1-48=-47$

故答-47. □

二位數相乘的速算法

一、任意二位數相乘

一般速算的書籍多會介紹這個法則，但筆者

認為有時它不見得比傳統算法快，並非理想的方法。試以 47×23 為例：將被乘數的十位數與乘數的十位數相乘 $(2\times 4 = 8)$、被乘數的個位數與乘數的個位數相乘 $(3\times 7 = 21)$，再將此二數的十位數與個位數交叉相乘 $(2\times 7 = 14, 3\times 4 = 12$，但右邊空出個位)，最後再相加即可。心算尚可的學生會直接寫出交叉相乘再相加的結果「26 」，以簡化計算步驟。

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & 4 & 7 & \\
 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 8 & 2 & 1 \\
 & 1 & 4 & \\
 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & 0 & 8 & 1
\end{array}
$$

二、利用$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 速算

這是符合特殊條件方得使用的法則：相差為偶數的相異二位數相乘時，可以使用平方差公式速算（但二數之差稍大則不一定方便），例如：

$$
\begin{aligned}
18\times 16 &= (17+1)(17-1) = 17^2-1^2 \\
&= 289-1 = 288
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
24\times 28 &= (26-2)(26+2) = 26^2-2^2 \\
&= 676-4 = 672.
\end{aligned}
$$

由於學生已熟背（30 以下的）整數平方，因此幾乎可以心算來完成。

三、十位數相同且個位數之和為 10 的二位數相乘

觀察幾個例子：

例：$1\boxed{8}\times 1\boxed{2} = 2\boxed{16}$, $2\boxed{1}\times 2\boxed{9} = 6\boxed{09}$,

$3\boxed{3}\times 3\boxed{7} = 12\boxed{21}$, $4\boxed{5}\times 4\boxed{5} = 20\boxed{25}$,

$5\boxed{6}\times 5\boxed{4} = 30\boxed{24}$.

這一類速算法的結果為「十位數乘以其後繼數（原數加 1），個位數直接相乘（佔個位及十位）」。細心的讀者不難發現，個位數為 5 的整數平方可由此法快速算出，例如 $1\boxed{5}^2 = 2\boxed{25}$, $2\boxed{5}^2 = 6\boxed{25}$, $3\boxed{5}^2 = 12\boxed{25}$, $4\boxed{5}^2 = 20\boxed{25}$, …，甚至可以推廣到 $11\boxed{5}^2 = 132\boxed{25}$, $12\boxed{5}^2 = 156\boxed{25}$ 等。這個方法的證明如下：

令相乘二數為 $10a+b$, $10a+c$, 且 $b+c=10$。

則

$$
\begin{aligned}
& (10a+b)(10a+c) \\
&= 100a^2 + 10a\,(b+c) + bc \\
&= 100a^2 + 100a + bc \\
&= 100a\,(a+1) + bc.
\end{aligned}
$$

四、利用分配律速算

善用分配律配合自己熟悉的二位數之倍數，可以將二位數相乘變成加減法。

例：$28\times 31 = 840 + 28 = 868$.

（說明：$28\times 31 = 28\times(30+1)$
$= 28\times 30 + 28\times 1$
$= 840 + 28 = 868$） □

例：$23\times 18 = 460 - 46 = 414$.

（說明：$23\times 18 = 23\times(20-2)$
$= 23\times 20 - 23\times 2$
$= 460 - 46 = 414$） □

與 5, 25, 125 有關的乘、除法

由於一個 2 乘以一個 5 會產生一個 0（其實是 10），利用這個關係，我們很容易處理與 5，25，125 有關的乘除法。

例：$234\times 5 = 2340\div 2 = 1170.$

（說明：$234\times 5 = 234\times 10\div 2 = 2340\div 2$
$= 1170$） □

例：$183 \times 25 = 18300 \div 4 = 4575$.

（說明：$183 \times 25 = 183 \times 100 \div 4 = 18300 \div 4 = 4575$）

例：$632 \div 5 = 63.2 \times 2 = 126.4$.

（說明：$632 \div 5 = 632 \div 10 \times 2 = 63.2 \times 2 = 126.4$）

協助學生練習的方法

前面介紹的速算原理與法則，都已經過試驗且獲得相當不錯的成果。但由於學生缺乏自我要求的動力，因此可利用下課前的兩三分鐘，以測驗形式協助學生熟練。依筆者的經驗，可以將其中部份題材事先製成小題卡，例如加法練習、30以下的平方、畢達哥拉斯數、補數、特殊形式的二位數相乘等等。實施時，題卡正面向下發卷，準備妥當後，請學生同時翻面做答，時間截止時必須停筆，不收卷但要核對答案。由於相同的題卡可能要測驗三到五次，不收卷的目的就是希望學生把答案背起來。

根據經驗，題卡上的題數不用太多（至多10題），以免耽誤時間。此外，一定要限制作答時間(相同的題卡更須逐次緊縮)。使用題卡以隨堂測驗方式進行，可以使學生有更濃厚的「參與感」及學習意願。當然若是能發展出團體競賽或遊戲，相信成效更好。假若時間不足，則可委託「小老師」利用其他時間進行。

結語

目前坊間介紹速算方法的書籍動輒提供上百種速算方法，但其中許多是類似的狀況，反而造成學習負擔。例如「兩個二位數相乘」，區分為「任意兩個二位數、十位數相同個位數相異、個位數相同而十位數相異、十位數相同且個位數之和為 10、……」等不同狀況，種類繁多容易混淆。基於合理分配(各科)學習時間的需要，筆者並不贊成把計算訓練變成這麼複雜，因此舉出幾個「改變一下閱讀算式的習慣（順序），或是調整自己對數學公式的看法（展開方式）」就可以領悟出速算方法的原則，協助學習者「記一些永遠有用的東西，活用幾個簡易的數學公式」，以提昇自己的計算能力。

由於篇幅有限，僅能提出幾個方法就教於大家。高一數學第一冊通常會有專章介紹數系各種性質，如果將之應用在速算，當有意想不到的好處。事實上，這些也是老生常談的速算法。期盼數學教育界的先進，能由這些簡易的性質或公式發展出更多的速算法則，以嘉惠莘莘學子。

附註：

另有一個法則是由二個相異正整數 m , n 產生，由於不符合本文原則，故不予討論。其生成法則為：m , n 是正整數，且 $m > n$，則 $2mn$, m^2-n^2 , m^2+n^2 可以產生一組畢達哥拉斯數。例如 $(m , n) = (2 , 1)$ 時，得 $(4 , 3 , 5)$；$(m , n) = (5 , 2)$ 時，得 $(20 , 21 , 29)$。

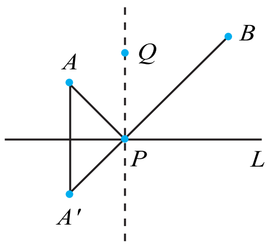
漫談反射定律

◎江慶昆／衛道中學

我們先看一個耳熟能詳的例子：

第 1 節

直線 L 的同側有兩點 A , B ; P 點在 L 上動，欲使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值，則 P 點位於何處？

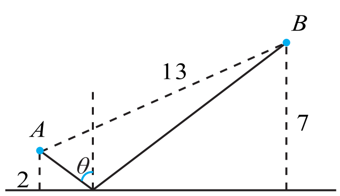


大家都知道，作 A 關於 L 的對稱點 A'，連接 $\overline{A'B}$ 與 L 交於 P，則 P 點即為所求。

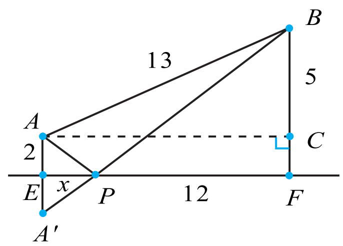
如果 L 是一面鏡子，則光由 A 點射向 P 點，反射到 B 點，在相同介質內，光走最短距離的路徑，這叫作最小作用量原理（註 1）。由此可以導出反射定律：入射角等於反射角，這是希臘 Alexandria 的 Heron 發現的。（光走花最少時間的路，後來叫做費馬原理（註 2））

【例題 1】

在一平面鏡的同側，有相距 13cm 的兩點 A , B ; 它們與平面鏡的距離分別是 2cm , 7cm , 由 A 射出的光線經平面鏡反射後到達 B 點，試求光線的入射角 θ。



解：



連接 $\overline{AB}$, 作 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$,

因為 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, 則 $\overline{EF}=\overline{AC}=12$,

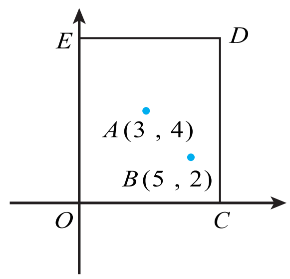
假設 $\overline{PE}=x$, 則 $\dfrac{2}{x}=\dfrac{7}{12-x}$, 得 $x=\dfrac{8}{3}$,

所以 $\tan\theta=\tan\angle PAE=\dfrac{4}{3}$,

亦即 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{4}{3}\approx 53.8^{0}$. $\square$

【例題 2】

$OCDE$ 是一長方形的彈珠台 , A (3,4) , B (5,2) ,由 A 射向 y 軸的 P 點後再反彈射向 x 軸的 Q 點，兩顆星撞到 B 點，其路徑為何？試計算此時 $\overline{PA}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 的值。



解：

作 A 點關於 y 軸的對稱點 $A'(-3\,,4)$,

B 點關於 x 軸的對稱點 $B'(5\,,-2)$,

連接 $\overline{A'B'}$, $\overline{A'B'}$ 分別交 x , y 軸於 Q , P , 即為所求，

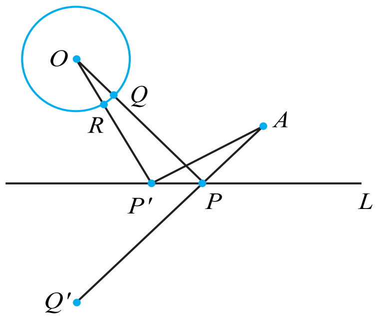
此時 $\overline{PA}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'B'}=\sqrt{(-3-5)^2+(4+2)^2}$

$=10$. $\square$

【例題 3】

直線 L 外一點 A，P 在直線 L 上，Q 在圓 O 上，求 $\overline{PQ}+\overline{PA}$ 有最小值時，P 點的位置。

解：



作 O 關於 L 的對稱點 O'，連接 $\overline{AO'}$，

則 $\overline{AO'}$ 與 L 的交點即為所求，

為了減少符號的負擔，所求的點仍以 P 表示。

現在，於 L 上任取一異於 P 的點 P'，

由反射定律知道 $\overline{P'O}+\overline{P'A}>\overline{PO}+\overline{PA}$，

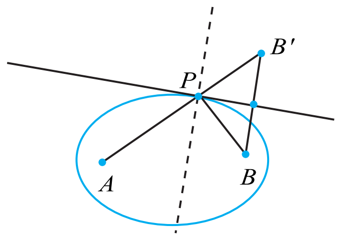
即 $\overline{OR}+\overline{P'R}+\overline{P'A}>\overline{OQ}+\overline{PQ}+\overline{PA}$，

因為 $\overline{OR}=\overline{OQ}$，所以 $\overline{P'R}+\overline{P'A}>\overline{PQ}+\overline{PA}$. □

第 2 節

反射定律是以直線或平面為基礎，但實務上不免碰到曲線或曲面，這個時候需要引進切線或切平面的概念。按常理推想，光線在一個點的反射行為，應該只受制於該點附近的形狀，照數學的語言來說，這是一個局部性的 (local)、攸關一個點及其附近的問題，而不是全面性的 (global)、攸關整個曲線的問題。於是，為了在一個點能應用基礎的反射定律，我們自然希望能把該點附近的曲線看成是「直」的，事實上，給定平面上一條光滑曲線及其上一點，曲線在這一點的附近幾乎是直的，這條直線就稱為切線。

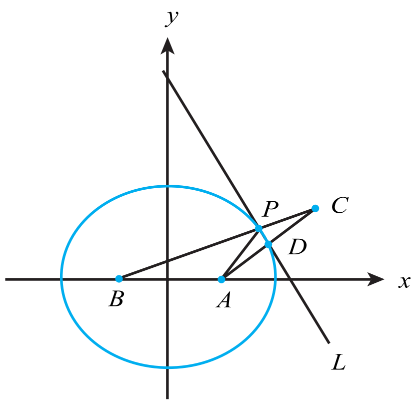
舉例來說，若鏡子是個橢圓形，A，B 是兩焦點，光線由 A 射向 P，並經由 P 點的切線反射，為了滿足入射角等於反射角的定律，反射線必然會通過 B。各位是否在這裡看到第 1 節的影子（註 3）。這裏特別值得注意的是 A，P，B' 三點共線，因此，橢圓的長軸長 $=\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}=\overline{AB'}$。



【例題 4】

已知 $A(2,0)$，$B(-2,0)$ 是橢圓 T 的兩焦點，$L: 3x+2y=8\sqrt{3}$ 是 T 的一切線，求此橢圓方程式。

解：



$L: 3x+2y=8\sqrt{3}$，

假設 A 關於 L 的對稱點為 C，

則直線 AC：$2x-3y=4$，

聯立解出 L 與 $\overline{AC}$ 交點 $D\left(\dfrac{8+24\sqrt{3}}{13},\dfrac{-12+16\sqrt{3}}{13}\right)$，

得 $C\left(\dfrac{-10+48\sqrt{3}}{13},\dfrac{-24+32\sqrt{3}}{13}\right)$

設 L 與橢圓相切於 P，因此，長軸長

$$2a=\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{BC}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{16+48\sqrt{3}}{13}\right)^2+\left(\frac{-24+32\sqrt{3}}{13}\right)^2}$$
$$=\frac{8}{13}\sqrt{(2+6\sqrt{3})^2+(-3+4\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{8}{13}\sqrt{169}=8,$$

得 $a=4$，又 $c=2$，所以 $b=\sqrt{12}$，

故橢圓的方程式為 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. □

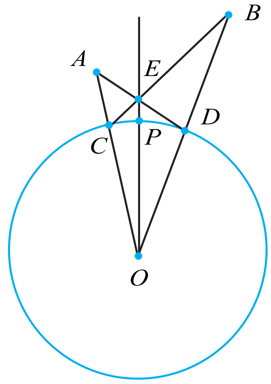
第 3 節

有一次，不曉得是誰在數學研習會上提出了這麼一個問題：

A, B 是圓外兩點，P 在圓上動,則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為何？又此時 P 點在哪裡？

老賴說，應該是這樣的：

連結 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$，假設 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 與圓 O 交於 C, D，假設 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 交於 E，連結 $\overline{OE}$ 交圓 O 於 P 點，則此 P 點即為所求。



當天回家，我用 GSP 試了一下，似乎就是這樣。無巧不成書，那一個週末（大約在 1999 年 3 月 7 日），我上 Swarthmore 的討論群（http://mathforum.org/discuss/sci.math），竟然看到這個問題，一時失察，就把「答案」post 上去，宣稱 P 點就是 $\overline{OE}$ 與圓的交點，結果被北伊利諾大學數學系的 Dave Rusin 教授訓了一頓，他詳細說明了本題中 P 點之不可尺規作圖（註 4）。換句話說，這裏所提出的作圖法其實是錯誤的。不過，我們雖然無法以尺規作圖得到 P 點，但 P 點的特徵還是可以透過反射定律來描述：

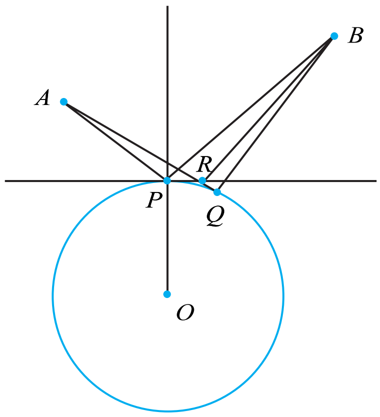
設 A, B 為圓 O 外相異兩點，且線段 $\overline{AB}$ 與圓 O 不相交，P 為圓 O 上一點，試證：當直線 $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$ 時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值。

證明：

假設 Q 是圓上異於 P 的任意點，$\overline{AQ}$ 交 L 於 R，

則 $\overline{AQ}+\overline{BQ}=\overline{AR}+\overline{QR}+\overline{QB}$

$$>\overline{AR}+\overline{BR}>\overline{AP}+\overline{BP}\ .\qquad \square$$



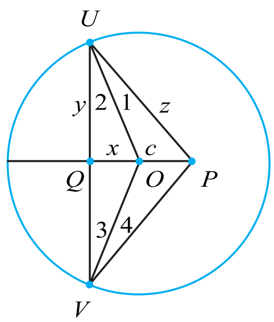
若 A, B 在圓 O 內部，在圓 O 上找一 P 點，使得 $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$， 亦即在圓形撞球台中 A, B 兩點各放一個撞球，由 A 撞到球台邊 P 點，彈回撞到 B 點上的球，稱為撞球台問題，這個問題最早是托勒密在公元後 150 年提出的，後來稱為 Alhazen 撞球台問題，以紀念阿拉伯學者 Alhazen 在光學上的貢獻。Elkin 1965 年，Reide 1989 年，Neumann 1998 年先後對這個問題有研究。

【例題 5】

P 是圓形球台內一點，如何撞擊 P 點，使其經過兩顆星後回到 P 點。

解：

假設圓 O 是半徑 $=r$ 的圓，$\overline{OP}=c$（已知），P 撞到 U 點後反射到 V 點再返回 P 點。為了描述如何撞擊 P 點，我們打算描述射線 $\overrightarrow{PU}$ 的方向：以射線 $\overrightarrow{PO}$ 為基準，順時針旋轉 $\angle OPU$。因此，我們只需求出 $\angle OPU$ 即可。



由反射定律，

因為 $\overline{OU}$, $\overline{OV}$ 是法線，所以 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,

因為 $\overline{OU} = \overline{OV}$，

所以 $\angle 2 = \angle 3$，$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$，

所以 $\overline{PU} = \overline{PV}$，$\triangle OPU \cong \triangle OPV$，

進而推得 $\triangle PQU \cong \triangle PQV$，所以 $\overleftrightarrow{OP} \perp \overline{UV}$，

設 $\overline{UV}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於 Q 點，

假設 $\overline{OQ} = x$，$\overline{QU} = y$，$\overline{PU} = z$。

在 $\triangle PUQ$ 中，因為 $\overline{OU}$ 是 $\angle QUP$ 的角平分線，

所以 $\dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{c}$.

又由畢氏定理得：$x^2 + y^2 = r^2$，$(x+c)^2 + y^2 = z^2$，

消去 y，z，得 $2cx^2 + r^2x = cr^2$，可以解出 x，並進一步求出 y。

因此，$\tan\angle OPU = \dfrac{\overline{QU}}{\overline{QP}} = \dfrac{y}{x+c}$，

即 $\angle OPU = \tan^{-1}\dfrac{y}{x+c}$. □

從反射定律可以延伸出各種形狀的撞球台問題，其中不乏有趣的 open problems，或許可作為科展的研究素材，這是我寫這篇文章的主要目的，有興趣的讀者不妨到以下的網頁好好瀏覽一番：

http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html

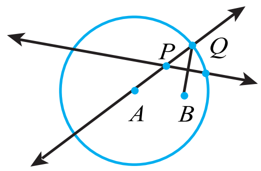
直線是半徑無限大的圓，圓可以看成橢圓的極限，那麼前述第 1、2、3 節之間又有什麼關聯呢？目前作者心中還沒個譜，也許劇變論 (catastrophe) 能提供答案。（對劇變論有興趣的人，有一本《劇變論入門》，曉園出版社，蕭欣忠、呂素齡等翻譯，值得推薦。）■

附註：

[1] 最小作用量原理到底是誰先提出來的？是 Euler（《數學與猜想》P.131）、還是 Pierre L.M. de Maupertuis？（西方文化中的數學 M Kline 著，P. 235），其實並不重要，「真理就在那裡,我們只是去發現」，這叫作柏拉圖主義。

[2] 這裡所提的的內容是科際整合的一個好例子，它的力學解釋請看《數學與發現》P.158；其間提到 Fermat 以光速為有限，可以解決反射問題，亦即，「假設光速為有限」並不是愛因斯坦的創見。

[3] 給定一圓 A；B 是圓 A 內異於 A 的點，Q 是圓 A 上之動點，假設 P 是直線 $\overline{AQ}$ 與線段 $\overline{BQ}$ 的中垂線 L 的交點，則 P 點的軌跡為橢圓 Γ，同時動直線 L 也包絡出橢圓 Γ，這一點，你用 GSP 很容易確認。



[4] 我把 Dave Rusin 教授文中詳細說明本題中 P 點之不可尺規作圖的文章放在我的 Homepage：

http://www.vtsh.tc.edu.tw/~jck/topics/leastaction/geomin01.htm

http://www.vtsh.tc.edu.tw/~jck/topics/leastaction/geomin02.htm

參考文獻 [10] 中，對尺規作圖有扼要的說明，嚴格的證明要用到 Galois 理論，是大二的代數。

參考文獻：

[1]〈最小作用量原理〉，《費因曼物理學第 2 部（上冊）》，徐氏基金會，P.357。

[2] G.Polya 著，李心燦等譯：《數學與猜想》，九章出版社（台北），P.154。

[3] G.Polya 著，九章編輯部譯：《數學發現》九章出版社（台北），P.158。

[4]《數學傳播季刊》第 10 卷第 1 期，P.5。

[5]《數學傳播季刊》第 14 卷第 2 期，第 15 卷第 2 期，第 17 卷第 4 期。

[6] 楊維哲著：《初中資優生的解析幾何學》，三民出版社。

[7] 楊維哲著：《高中資優生的立體解析幾何學》，三民出版社，1999。

[8] Heinrich Dörrie 著：《100 Great Problems of Elementary Mathematics》，1965，P.197。

[9] Dnnnis E. shasha 著，翁秉仁譯：〈完美出桿〉，《科學人月刊》2003/01, P.126。

[10] http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html

[11]《華羅庚科普著作選集》，亞東書局，P.200。

中國的測量術

◎蘇俊鴻／北一女中

前言

一談起測量方法，大家腦中馬上浮現「三角測量」——藉助三角函數的幫助，我們只要測量出某些長度及角度，就能處理那些我們無法實際量測的問題。這也是老師在三角函數的學習上，用來強化三角函數「正當性」的最佳理由。事實上，每個文化在某些條件的限制下，可能發展出不同於我們現有的概念或策略。比如說吧，中國古代缺乏一般角度的概念，因此今日我們所熟知的三角學理論並沒有在中國發展起來。但中國仍然建立起非常發達、程度極高的測量技術。本文想藉由中算史的相關文本介紹，說明利用三角函數來處理測量問題，並非唯一的途徑。

由於中算上缺乏一般角度的概念，因此只好藉助直角三角形（勾股）來處理，這樣的方法稱之為勾股測量。我們可由測量工具的使用得到驗證，中算傳統上使用的工具有兩種：一是矩；另一是表。矩就是彎曲成直角的曲尺，表就是垂直的量杆，都是為了構造出勾股形。本文則是對勾股測量做一個初步的介紹。

勾股測量與《九章算術》

測量技術的發展，離不開實際事務的需要，如天文的觀測、建築工程、土地丈量及地圖的繪製等，因此勾股測量在中國發展極早。以多數讀者熟知的《九章算術》來說，在它的卷九〈勾股〉章所談的便是與勾股形相關的問題。全章共24 個問題，其中第 1～5 個問題，是勾股定理及其直接應用，第 6～13 及第 24 個問題是解勾股形的問題；第 14～15 個問題是勾股容方、容圓；第 16～23 個問題則是測望問題。試舉幾例如下：

第 19 問　今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木，出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木，問邑方幾何？

第 21 問　今有木去人不知遠近。立四表，相去各一丈，今左兩表與所望相直。後右表望之，入前表三寸。問木去人幾何？

第 22 問　今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木東三里，望木末，適與山峰斜平。人目高七尺。問山高幾何？

第 23 問　今有井，徑五尺，不知其深。立五尺木於井上，從木末望水岸，入徑四寸。問井深幾何？

這幾個問題與常見的測量問題相當類似，可以當成課堂教材的補充。事實上，卷九勾股章中第 16～20 問與方形的城池（邑方）有關，筆者特別挑選第 19 問做一個說明，是有二個原因的考慮：

㈠ 劉徽在這個問題的注解上給了我們兩個不同面向的說明--「率」及「出入相補」；

㈡ 這個問題的術文所導出的一元二次方程式

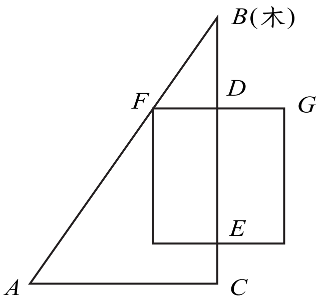
$$x^2 + (20 + 14)\,x = 2 \times 20 \times 1775$$

$$\Rightarrow x^2 + 34x = 71000$$

是中算史上第一個出現帶有一次項的二次方程式。

第 19 問的題意如圖一，為便於表示，筆者用現在的數學符號輔以說明劉徽的注解，劉徽首先是利用「率」的觀念來解決此題：

此以折而西行為股，自木至邑南一十四步為勾，以出北門二十步為勾率，北門至西隅為股率，半廣數。故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪。然此冪居半以西，故又倍之，合東，盡之也。



▲圖一

設邑方 $\overline{DE} = x$，則 $\overline{AC}$ 為股，$\overline{BC}$ 為勾，$\overline{BD}$ 為勾率，$\overline{FD} = \dfrac{x}{2}$ 為股率。

則

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{FD} : \overline{BD}$$

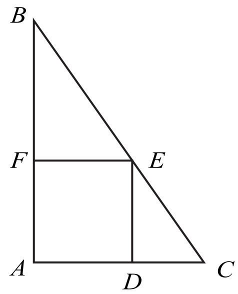
$$\Rightarrow 1775 : (20 + x + 14) = \frac{x}{2} : 20$$

$$\Rightarrow x^2 + 34x = 71000 \cdots (1)$$

由上可知，主要的關鍵在於關係式 $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{FD} : \overline{BD}$ 的成立，眼明的讀者或許會猜測是奠基在直角 $\triangle ABC$ 與直角 $\triangle FBD$ 的相似。然而筆者在此必須重申：當時的中算家是沒有一般角度的概念，也就沒有平行線性質的探討，因此也就沒有相似形理論的建立。那麼劉徽是如何找到這個關係式的呢？

要回答這個問題，我們就必須談到劉徽在第 14 問勾中容方的注解，第 14 問是這樣的問題“今有勾五步，股一十二步。問勾中容方幾何？”劉徽在注解中提出：

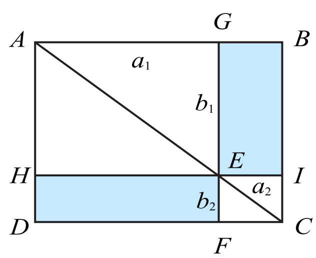
冪圖：方在勾中，則方之兩廉各自成小勾股，而其相與之勢不失本率也。



▲圖二

此段文意以圖二說明，在$\triangle BFE$ 與$\triangle EDC$ 中，邊長成比例，即是 $\overline{BF} : \overline{FE} : \overline{BE} = \overline{ED} : \overline{DC} : \overline{EC}$ 。劉徽利用這個性質證明勾中容方及勾中容圓的公式，也證明測望問題之術文的正確性。但可惜的是，由於劉徽注解的原始圖形佚失，也無進一步的文字說明，因此無法得知劉徽最初的想法何來。所幸數學史家們在楊輝所著的《楊輝算法》中《續古摘奇算法》卷下，看見後世中算家對劉徽可能想法的完整還原

直田之長名股，其闊名勾，於兩隅角斜界一線，其名弦。弦之內、外分二勾股，其一勾中容橫，其一股中容直，二積二數皆同。



▲圖三

由圖三，我們可以清楚地看到長方形 $ABCD$ 由對角線平分成兩個直角三角形，由於正方形 $AGEH$ 及正方形 $EICF$ 也被平分成兩個直角三角形。所以，

$$\begin{aligned}\text{長方形 } HEFD \text{ 面積} &= \triangle ACD - \triangle AEH - \triangle ECF \\ &= \triangle ACB - \triangle AEG - \triangle ECI \\ &= \text{長方形 } GBIE \text{ 面積}\end{aligned}$$

因此，

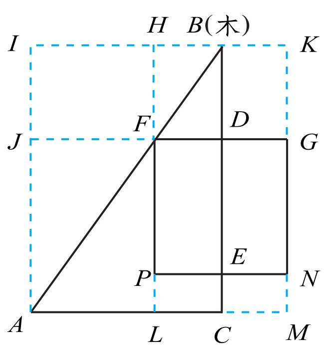
$$a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow a_1 : b_2 = a_2 : b_2 .$$

這個「勾中容橫，其一股中容直，二積二數皆同。」的性質在中算的勾股問題中，有著重要的作用。筆者認為這個利用面積關係來尋求兩個勾股形比例關係，是一個有趣且值得在課堂演示引介的作法。除了讓學生有機會看到省略相似形理論，亦能作出比例的關係外；也讓學生了解在不同的時空文化限制下，知識的成長是可能擁有不同風貌的。

再回到劉徽對第19問的注解上，第二種「可能」的作法是利用「出入相補」原理：

> 此術之冪，東西如邑方，南北自木盡邑方十四步之冪。各南、北方為廣，邑方為袤，故連兩廣為從法，並以為隅外之冪也。

沿用上面的符號說明，見圖四，



圖四

我們設邑方 $\overline{DE} = x$，因此「東西如邑方，南北自木盡邑方十四步之冪。」，即為長方形 $HKML$ 的面積

$$x\,(20 + x + 14) = x^2 + (20 + 14)\,x\,,$$

由列式來看「各南、北方為廣，邑方為袤，故連兩廣為從法，並以為隅外之冪也。」接下來劉徽就沒有注釋說明。這樣一來，只完成(1)式的左半。右半則必須利用到長方形 $IBDJ$ 面積與長方形 $HBCL$ 面積相等，而長方形 $HKML$ 的面積 = 2 倍長方形 $HBCL$ 面積。

因此，

$$\begin{aligned}& x^2 + (20 + 14)\,x = 2 \times 20 \times 1775 \\ \Rightarrow\ & x^2 + (20 + 14)\,x = 71000.\end{aligned}$$

然而，右半的說明是後來史家們添加的，這也是為何筆者在本段開頭使用「可能」這個字眼的原因。我們若考慮劉徽在勾中容方所提出的性質，加上楊輝的還原，應該可以相信劉徽及當時的算家對於出入相補原理是熟悉且運用自如的。更重要的是，出入相補原理更成為後世史家解讀「重差法」的重要依據。

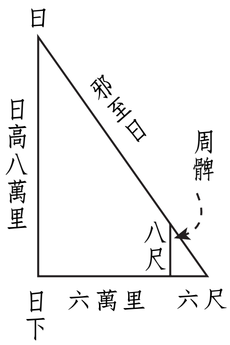
除了上述列舉的測量問題外，在天文觀測上，古代算家也是利用勾股測量的方法來測量太陽的高度及太陽的大小。並且更進一步改良勾股測量的方法，這就是接下來筆者所要談的「重差法」。

重差法與《海島算經》

什麼是「重差法」？在上述的例題中，讀者不難發現都只用到一個「表」（垂直的量桿）或相當於「表」的作用之替代物來當做測量的基準。而重差法，簡單地說，就是利用兩個或兩個以上的「表」當做測量基準的測量方法。為什麼必須改良呢？這有著其不得不然的原因，且容筆者細細道來。

首先從《周髀算經》談起，這本目前中國最古老的天文學著作，成書時間比《九章算術》更早，主要內容是闡明蓋天說—西漢時期所流行的一種宇宙結構學說，一開頭便是量測太陽高度及距離的問題：

…周髀長八尺，…髀者，股也。正晷者，勾也。…日益表南，晷日益長，候勾六尺。…從髀至日下六萬里而髀無影，從此以上至日。則八萬里。若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，并而開方除之，得邪至日，從髀所旁至日所十萬里。



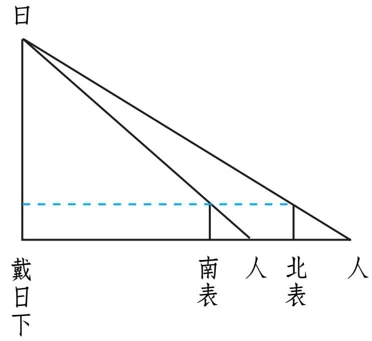
▲圖五

此段文意如圖五所示，可見當時量天度日的測量方法與工具，對於勾股定理的運用已經相當的純熟。或許，你的心中會疑惑古人如何測量「從髀至日下六萬里」呢？其實古人是依靠一條經驗上的假設「表影一千里差一寸」推論得出，這個假設應是來自觀察所得的規律，出錯的機會相對地增多。因而引發算家對測量方法的改進，導致重差法的產生。

根據史家吳文俊對《周髀算經》趙君卿注釋中對日高圖的還原，以及使用出入相補原理重新詮釋後，確信趙君卿已經掌握「重差法」：利用兩個等高的表，分別量得該表的影長，從而得到影差，計算出日高及日遠。劉徽則是在重差法的基礎上，將它的應用層面加以推廣。

劉徽在〈《九章算術》注序〉首先談到重差法的用處：「凡望極高，測絕深而兼知其遠者必用重差、勾股，則必以重差為率，故曰重差。」更舉洛陽測日為例，逐錄如下以為說明：

立兩表於洛陽之城，令高八尺，南北各盡平地。同日度其正中之影，以影差為法，表高乘表間為實，實如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之影乘表間為實，實如法而一，即南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地為勾、股，為之求弦，即日去人也。



▲圖六

此段文意如圖六，文中劉徽只告訴我們表高八尺，並沒有其他實測的數字，純粹是方法的展示。劉徽給了兩個重差法的基本公式：

$$日去地=\frac{表間\times 表高}{影差}+表高$$

$$南表至日下=\frac{表間\times 南表影}{影差}$$

由此看出藉助兩表的測量，可省略考慮表到日下的距離，免除依賴經驗性假設。此外，這兩個公式與劉徽《海島算經》第一問望海島公式形式一致，因此公式推導的說明，筆者稍後再補充論述。

劉徽在洛陽測日的例子後，接著寫道：

雖夫圖穹之象猶曰可度，又況泰山之高與江海之廣哉。徽以為今之史籍且略舉天地之物，考論厥數，載之於志。以闡世術之美，輒造《重

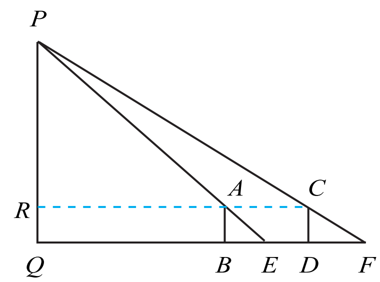
差》，並為注解，以究古人之意，綴於勾股之下。度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望。觸類而長之，則雖幽遐詭伏，靡所不入。

劉徽在量天測日後，將重差法推廣到大地測量之上，寫成《重差》一章，置於《九章算術》勾股章之後，並提出「度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望。」等法則。在唐朝初年，選定十部算經時，李淳風將其由《九章算術》中分出，並命名為《海島算經》。宋刻本的《海島算經》已經失佚，現行的傳本是戴震從《永樂大典》中輯錄而得，是否與原書相同，已不可考。

現在流傳的《海島算經》一書共九問，由於劉徽的原圖與注釋均佚失，僅留下李淳風的注釋，但是李淳風僅將實際數字代入，演算每一條術文步驟的正確性，並未將設題造術的可能原由寫出。到了清朝，算學家李潢（?～1812）撰有《海島算經細草圖說》一卷，利用相似形的對應邊成比例來說明術文的正確性。史家普遍認為李潢的圖畫的輔助線過多，恐怕不合乎劉徽的原意。根據當時的數學水平及《九章算術》所呈現的方法，可能性不外乎兩種：一是利用勾股形的“其相與之勢不失本率”；另一則是利用出入相補原理。這兩種方法劉徽都曾在勾股章使用過，但根據筆者目前所見的資料，覺得利用後者的還原的作法比較沒有疑義。以下便利用出入相補原理為各位說明《海島算經》第一問的題目與術文。

《海島算經》第一問為測海島問，此書因而得名。題目如下：

今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地，取望島峰，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地，取望島峰，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？術曰：以表高乘表間為實，相多為法除之，所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者，以前表卻行乘表間為實，相多為法除之，得島去表數。



▲圖七

此望海島問的題意如圖七，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為兩表，$\overline{PQ}$ 為島高，也許眼尖的讀者已經發現圖七與圖六完全相同，術文的公式當然也相同（只要替換對應的名稱即可）：

$$\text{島高} = \frac{\text{表間} \times \text{表高}}{\text{相多}} + \text{表高}$$

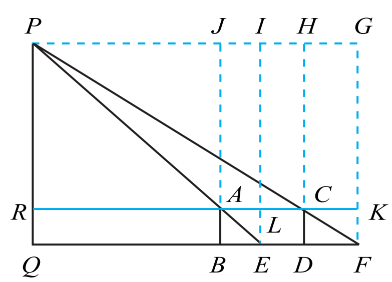
$$\left(\text{即 } \overline{PQ} = \frac{\overline{BD} \times \overline{AB}}{\overline{DF} - \overline{BE}} + \overline{AB}\right)$$

$$\text{前表去島} = \frac{\text{表間} \times \text{前表卻行}}{\text{相多}}$$

$$\left(\text{即 } \overline{BQ} = \frac{\overline{BD} \times \overline{BE}}{\overline{DF} - \overline{BE}}\right)$$

其中表間為 $\overline{BD}$；相多為 $\overline{DF} - \overline{BE}$（就是影差）；前表卻行為 $\overline{BE}$。

以下是史家吳文俊先生利用「出入相補」原理，對這個公式所提出的證明，如圖八，



▲圖八

在長方形 $PGFQ$ 中，

長方形 $CHGK$ 的面積 = 長方形 $CDQR$ 的面積，

在長方形 $PIEQ$ 中，

長方形 $AJIL$ 的面積 = 長方形 $ABQR$ 的面積，

然後兩式相減

長方形 $CHGK$ 的面積－長方形 $AJIL$ 的面積

= 長方形 $CDQR$ 的面積－長方形 $ABQR$ 的面積

所以，

$$\overline{PR}\times(\overline{CK}-\overline{AL})=\overline{BD}\times\overline{AB}$$
$$\Rightarrow(\overline{PQ}-\overline{AB})\times(\overline{DF}-\overline{BE})=\overline{BD}\times\overline{AB}$$
$$\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{\overline{DF}-\overline{BE}}+\overline{AB}$$

又長方形 $ABQR$ 的面積 = 長方形 $AJIL$ 的面積，

所以，

$$\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times\overline{PR}$$
$$\Rightarrow\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times(\overline{PQ}-\overline{AB}).$$

再將上述 $\overline{PQ}=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{\overline{DF}-\overline{BE}}+\overline{AB}$ 代入，

即可得

$$\overline{BQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{BE}}{\overline{DF}-\overline{BE}}.$$

由上可知「出入相補原理」在理解《海島算經》所扮演的重要角色，除了第一問，吳文俊先生也認為再加上《海島算經》的第二問、第四問等二題提出的結果，可形成全書的三個基本公式，書中其他各問均可由這三個公式推導而得。事實上，筆者目前所見的資料顯示，對於《海島算經》的解讀仍未完全有定論，例如，有史家便認為《海島算經》只有第一問是最基本的，其餘的各問，是利用第一問的公式，加上比例性質的應用得到，有興趣的讀者可再深入研究。

結語

《海島算經》以降，中國在測量技術與方法上達到完善與巔峰，我們可在魏晉時期地圖繪製的技術與理論的建立上，得知重差法在當時是被廣為運用的。後世的算書多有重差法的題設的紀錄，如南宋秦九韶的《數書九章》、南宋楊輝的《續古摘奇算法》，元朝李冶的《測圓海鏡》，明朝程大位的《算法統宗》等書。在題目列式的方法上，均與《海島算經》的方法相同，並沒有任何改進。

直到明末清初，三角學的知識隨著傳教士進入中國，中算家才開始了解角的度量及相關內容。此時勾股測量受到衝擊。以康熙命令編纂的《數理精蘊》為例，雖然《數理精蘊》下編卷十八〈測量〉將勾股測量與三角測量分開編寫，對編纂者來說，這兩者的異同是清楚的：「勾股必為直角，而三角形則惟變所適，而無定形，要以角度為準。而用割圓八線，以為比例。凡求角求邊，皆以三角形之法為本。……不特凡物之高深廣遠可得而推，即七政之躔度，天地之形體，俱可得而測也。」

如果由教學的角度來看待勾股測量的方法，這其實是個知識門檻較低的作法，同學只須了解相似形比例，就可輕易推求答案。更何況老師也能趁此機會讓學生見識，不用相似形理論便可推求出相似勾股形的比例關係（一定會有驚豔之感）。在實際操作上，如同文本所見的題目，只要把握勾股形的建立，測量長度即可完成，測量工作易於實行，也能避免角度量測容易造成誤差的弊病。

此外，由外在文化及環境等因素對知識發展造成的影響來看，除了大家熟知希臘人對「無限」的恐懼的例子外，這個勾股測量的例子，也提供我們另一個觀照的例證，在缺乏角度概念的限制下，中算家也能建立起當時領先世界的測量技術。更重要的是，沒有利用三角函數哦！

普通高中課程暫行綱要九十五學年度實施（摘錄）

【教育部新聞稿——日期：93.6.15　發稿單位：中教司】

教育部十五日召開普通高級中學課程發展委員會及總綱小組聯席會議，會中針對四月十九、二十日全國高中教育發展會議通過之普通高級中學課程暫行綱要草案進行討論，（以下略）修正了普通高級中學課程暫行綱要，同時此項修正計畫最快將於今年八月底前定案，九十五學年度起開始實施。（以下略）

▼普通高中課程現行標準（現行）、暫行綱要（暫綱 93.6）科目與時數比較表

<table>
<tr><th>版本</th><th>科目</th><th>一上</th><th>一下</th><th>二上</th><th colspan="2">二下</th><th colspan="2">三上</th><th>三下</th><th>說明</th><th>版本比較</th></tr>
<tr><td rowspan="4">現行
暫綱</td><td>國文</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td>4</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">兩版本一致</td></tr>
<tr><td>英文</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>數學</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>體育</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">現行</td><td>班會</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">兩版本節數一致，科目名稱有別</td></tr>
<tr><td>團體活動</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>暫綱</td><td>綜合活動</td><td>2*</td><td>2*</td><td>2*</td><td colspan="2">2*</td><td colspan="2">2*</td><td>2*</td><td>每週 2 節，不計學分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">現行</td><td>家政</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">可每週各一節或上下學期對開二節</td><td rowspan="4">兩版本節數一致，排課方式不同</td></tr>
<tr><td>生活科技</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">暫綱</td><td>家政</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2" colspan="2"></td><td rowspan="2" colspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">每一科目至少修習二學分</td></tr>
<tr><td>生活科技</td></tr>
<tr><td>現行</td><td>軍訓&護理</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">1</td><td>1</td><td>合併使用</td><td rowspan="3">前二年節數一致，排課方式不同</td></tr>
<tr><td rowspan="2">暫綱</td><td>國防通識</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">高一、高二每學期 1 學分，或各校可依實際排課需要開設為一學年每學期各 2 學分</td></tr>
<tr><td>健康與護理</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">現行</td><td>音樂</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td rowspan="3">2</td><td></td><td></td><td rowspan="3">高二應在所列科目中每週修習二學分</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>美術</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>藝術生活</td><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">暫綱</td><td>音樂</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3" colspan="2">2</td><td rowspan="3" colspan="2">2</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">每一科目至少修習二學分，可靈活安排</td></tr>
<tr><td>美術</td></tr>
<tr><td>藝術生活</td></tr>
<tr><td rowspan="5">現行</td><td>三民主義</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td><td rowspan="5">1. 主義、公民、現代社會獨立設科
2. 高二史、地、社會三科彈性開課</td><td rowspan="8">將主義、公民、現代社會三科統整為「公民與社會」一科，與歷史、地理三科各必修 8 學分</td></tr>
<tr><td>公民</td><td></td><td></td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>歷史</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td rowspan="3">4</td><td>2</td><td rowspan="3">4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>地理</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>現代社會</td><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">暫綱</td><td>公民與社會</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2"></td><td></td><td rowspan="3">1. 主義、公民、社會統整為單科
2. 社會領域三科高一高二均開設必修</td></tr>
<tr><td>歷史</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>地理</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">現行</td><td>物理（基礎物理）</td><td>2</td><td>(2)</td><td>3</td><td rowspan="4">2-3</td><td>3</td><td rowspan="4">2-3</td><td></td><td></td><td rowspan="4">1. 高一 8 學分必修
2. 高二 4～6 學分並可彈性開課</td><td rowspan="8">暫綱規劃與暫綱草案相同，較新修之規畫高二可增加 2~4 學分之選修課程</td></tr>
<tr><td>化學（基礎化學）</td><td>(2)</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>生物（生命科學）</td><td>2</td><td>(2)</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>地科（基礎地科）</td><td>(2)</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">暫綱</td><td>物理</td><td>(2)</td><td>2</td><td>3</td><td rowspan="4">2-3</td><td>3</td><td rowspan="4">2-3</td><td></td><td></td><td rowspan="4">1. 高一 8 學分必修
2. 高二 4~6 學分並可彈性開課</td></tr>
<tr><td>化學</td><td>2</td><td>(2)</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>生物</td><td>2</td><td>(2)</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>地球與環境</td><td>(2)</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

資料來源：教育部網站 http://www.edu.tw/index.htm

從幾個生活上常見的問題，來建立一些簡單的著作權概念

龍騰編輯部　陳華雯

提到著作權，大家一定有種聽過但又一知半解的感覺，對於不清楚的地帶，能夠事先釐清，是比較保護自己也尊重別人的行為。在大家眼中看來平常的行為，其實都可能潛藏著觸法的危機。本期的著作權小百科，對幾個大家認知較模糊的觀念，透過問答的方式，協助您建立一些簡單基礎的小概念。

Q：著作權法是不是只保護國內的出版品？既然著作權法是國內所公布，對於國外的一些創作，是不是就不保護了呢？

A：我國加入 WTO 之後，基於平等互惠的原則，只要是 WTO 的會員國，彼此間是必須保護彼此的著作，而不論其著作是否有在我國或外國發行。（註 1 ）WTO 會員國迄今共有 147 個國家或地區，因此除了極少數尚未加入 WTO 的國家（例如：俄羅斯、高棉、沙烏地阿拉伯）以外，幾乎所有國家人民的著作，在我國都受到著作權的保護。

Q：在網路上看到欣賞的文章、喜愛的圖片與照片，可以將其存取下來，並大量轉寄給別人嗎？

A：

1. 若您看到欣賞的文章、喜愛的圖片與照片，是可以一般的書信作往來，將您的想法分享給他人，或者為個人或家裡欣賞的目的在合理的範圍內存取。
2. 但若大量轉寄，或者將這些東西置放到公司或學校的網路平台上進行分享，此部分行為已經侵害到著作財產權人之公開傳輸權（註 2），就會有觸法的可能。
3. 此外若要將這些東西引用到自己的文章內發表、出版，可能要注意到引用的方式和篇幅是否符合著作權法上的合理引用規定（著作權法第 52 條），如果不符合合理引用的規定，就需要取得著作人的授權。

Q：在進行寫作的時候，參考他人的資料是無法避免的，根據著作權法，是不是就完全不能隨意的引用？

A：

1. 著作權的保護有一定期限，也有一些是不受著作權保護的（例如：法令、公文、標語、通用之名詞、符號、公式、表格、依法令舉行之考試試題等）。只要是不受著作權保護的，或者著作權保護期間已屆滿而成為公共財產的，就可以直接引用，只要注意不要侵犯到著作者的著作人格權（註 3）即可。
2. ⑴ 著作權法中，有所謂的合理引用（亦即以自己文章為主，被引用的文字或圖片

為輔，主客之間必須能加以區辨），只要註明出處即可。

⑵ 何謂「合理範圍」，著作權法雖然有規定幾個判斷標準（註 4），但具體個案有時並不容易判斷。

＊ 基本上是因應文章需求而無法不引用他人的部分內容作為佐證，構成合理引用的可能性較高。

＊ 而引用的篇幅若又算小，占自己文章的比例和占被引用文章的比例都不高，構成合理引用的可能性也較高。

＊ 如果無法判斷是否可以構成合理使用，也可以針對使用的部分，去向著作人取得授權，同意您的使用，這樣也可以避免日後有任何的爭執發生。

3. 此外依據著作權法的規定（註 5），政府機關、學校可以引用他人的文章或圖片來出考試試題，但是若是他人已出好的試題，則不可任意引用。

雖然著作權法早已公布且每一條皆寫的相當清楚明白，但因為每一個個案發生的背景因素不同，而有不同的判決。因此能夠活用當中的一些觀念，是相當重要的。關於著作權的一些相關事項，是屬於經濟部智慧財產局所管轄的，如果有一些疑問，也可以上網去查詢（註 6）。

Q：我們可以將喜歡的書籍請影印店全書影印一份留存嗎？

A：

1. 受到著作權法保護的出版品，其著作人享有著作財產權，財產權當中有一個重製權，不管你是局部或全部，也不管有沒有營利，凡使用「供公眾使用的機器」（圖書館的影印機例外），例如影印店、公司行號的影印機，將書籍內容複製一份呈現，如果不符合合理使用的規定，都已經侵害到重製權。如果是自己個人使用並沒有營利的意思，而且重製的份數沒有超過五份，而且被重製的書籍的全部市價沒有超過新臺幣三萬元的話，是會有民事責任的；但如果複製超過五份，或是被重製的書籍的全部市價超過新臺幣三萬元的話，還會觸犯刑事責任。因此前陣子，才會有國外的書商，針對大學生影印原文書，而訴諸法律途徑。

2. 老師有時因為教學需要（註 7），可以局部影印部分資料提供給學生參考，然而提供的內容與數量仍不宜過多，若此本書真的是課堂中必備參考工具，建議還是用購買的方式。

註：

1. 此外，依據著作權法規定：只要是首次於國內發行，或者於他國發行後，三十日內於國內發行者；依條約、協定與我國有互惠保護彼此著作關係的國家，也是同樣受到保護的。
2. 著作權法第三條第十項「指以有線電、無線電之網路或其他通訊方法，藉聲音或影像向公眾提供或傳達著作內容，包括使公眾得於其各自選定之時間或地點，以上述方法接收著作內容。」
3. 包含公開發表權、姓名表示權、同一性保持權等權利。著作人格權的保護並無期限，在著作人死亡後仍受到保護，不過侵害著作人格權只有民事責任，不會有刑事責任。
4. 合理使用之綜合判斷標準：利用之目的及性質；著作之性質；所利用之質量及其在整個著作所占比例；利用結果對著作潛在市場與現在價值之影響。
5. 著作權法第五十四條「政府、依法設立之各級學校或教育機構辦理之各種考試，得重製已公開發表之著作，供為試題之用。但已公開發表之著作如為試題者，不適用之。」
6. 經濟部智慧財產局 http://www.tipo.gov.tw/default.asp
7. 著作權法第四十六條「依法設立之各級學校及其擔任教學之人，為學校授課需要，在合理範圍內，得重製他人已公開發表之著作。」

參考解答 問題集Ⅷ

誌謝

感謝全國師生對問題集的熱烈迴響！由於篇幅所限，我們實在無法將全部稿件一一刊載，敬請大家見諒。底下是所有參與問題集Ⅷ的師生名單，《數學新天地》謹此致上最深的謝意：

林志漢／台北市私立大同高中；**李維昌**／宜蘭高中；**胡照南**／台南高商；**林瑋勛**同學／武陵高中一年 1 班；**陳佳煌**／高雄高工；林翠峯／桃園高中；**楊世堯**／基隆市立中山高中；**蘇億城**、**康竣閔**、**黃楚軒**同學（巫權佑老師指導）／台南一中二年 20 班；**姚建銘**／高雄市立瑞祥高中；**黃見益**／**道明**高中；**李孫郡**／路竹高中；**陳基正**／台南善化高中；**傅世豪**、**郭晉嘉**同學（李建杰老師指導）／桃園永豐高中一年 6 班；**吳宏儀**、**蕭義勝**、**劉乃菀**同學(曹昌東老師指導）／台北市內湖高中一年級；**張簡漢華**／屏東縣立大同高中；**胡立人**同學／台北縣安康高中二年 1 班；**廖森游**／台北縣安康高中；**鄭仕豐**／彰化縣員**林家商**；嘉義女中一年 17 班（林偉聖老師指導）；**陳文憲**／高雄前鎮高中；**王柏齡**／台北市再興中學；**張進安**／高雄中正高中；**胡凱華**／台南一中；**翁碧雲**／高雄三民家商；**林志豪**同學（**廖森游**老師指導）／台北縣安康高中；**許珍鳳**、**蕭惠鐘**同學／高雄市立瑞祥高中（已畢業）；**陳曉惠**同學／桃園縣新興高中；**蕭雅云**同學（**鄭仕豐**老師指導）／彰化縣員林家商二年 1 班（以上依進稿先後順序排列）

8-1. 設 p 與 q 是介於 0 與 1 之間的實數，在以

$$\frac{1}{p}+p,\ \frac{1}{q}+q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q\ (0<p,q<1)$$

為三邊邊長的三角形中，求邊長

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q$$

上的高為何？

【解一】（吳卓翰、潘德富同學（黃光文老師指導）／高雄仁武中學

利用海龍公式，

$$\text{三角形的面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

令 $a=\frac{1}{p}+p,\ b=\frac{1}{q}+q,\ c=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q,$

則

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q},$$

所以，

$$\Delta=\sqrt{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})(\frac{1}{q}-p)(\frac{1}{p}-q)(p+q)}$$

$$=\sqrt{\frac{(p+q)^2\cdot(1-pq)^2}{(pq)^2}}$$

$$=\frac{(p+q)(1-pq)}{pq}\ (\because 0<p,q<1)$$

令 $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q)$ 上之高為 h，

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q)\cdot h=\frac{(p+q)(1-pq)}{pq}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+q)(1-pq)}{pq}\cdot h=\frac{(p+q)(1-pq)}{pq}$$

$\Rightarrow h=2.$ □

【解二】（廖森游老師／台北縣安康高中）

因為

$$0<p<1,$$

所以

$$\frac{1}{p}+p \ge 2\sqrt{p\cdot\frac{1}{p}}=2$$（算幾不等式）

又

$$\frac{1}{p}+p>\frac{1}{p}-p,$$

利用

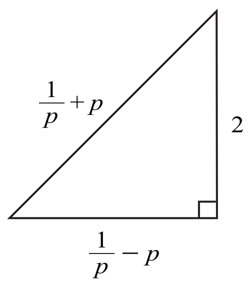
$$(a-b)^2+4ab=(a+b)^2,$$

所以

$$(\frac{1}{p}-p)^2+4=(\frac{1}{p}+p)^2$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{p}-p)^2+2^2=(\frac{1}{p}+p)^2,$$

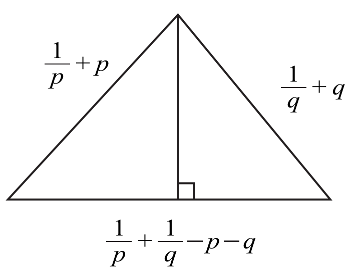
即以 $\frac{1}{p}+p$ 為斜邊，$\frac{1}{p}-p$ 及 2 為二股的直角三角形，



同理

$$(\frac{1}{q}-q)^2+2^2=(\frac{1}{q}+q)^2,$$

即以 $\frac{1}{q}+q$ 為斜邊，$\frac{1}{q}-q$ 及 2 為二股的直角三角形，



故邊長 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q$ 上的高為 2. □

8-2.

(1) 若 α,β,γ 是任意三個角，則證明三角恆等式

$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$

成立。

(2) 利用(1)的結果證明托勒密定理，即圓內接四邊形 $ABCD$ 會有

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$$

的關係式。

【解一】（林志漢老師／台北市私立大同高中）

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)$

$=\sin\alpha\cos\gamma\cos\beta\sin\beta+\cos^2\beta\sin\alpha\sin\gamma+\sin^2\beta\cos\alpha\cos\gamma$

$\quad+\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma$

$=\sin\beta\cos\beta(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)$

$\quad+(1-\sin^2\beta)\sin\alpha\sin\gamma+\sin^2\beta\cos\alpha\cos\gamma$

$=\sin\beta\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)+\sin^2\beta(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$

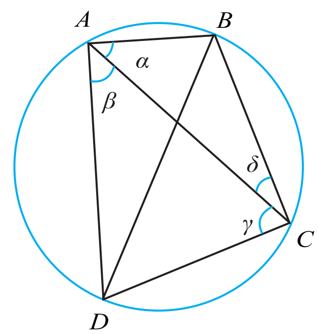
$\quad+\sin\alpha\sin\gamma$

$=\sin\beta\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)+\sin^2\beta\cos(\alpha+\gamma)+\sin\alpha\sin\gamma$

$=\sin\beta[\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)+\sin\beta\cos(\alpha+\gamma)]+\sin\alpha\sin\gamma$

$=\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha\sin\gamma$　得證。

(2) 如圖，設四邊形 $ABCD$ 外接圓半徑為 R，



因為△ABC，△ABD，△ACD，△BCD 的外接圓半徑均為 R，由正弦定理知

$$\sin\alpha=\frac{\overline{BC}}{2R},\ \sin\beta=\frac{\overline{CD}}{2R},\ \sin\gamma=\frac{\overline{AD}}{2R},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BD}}{2R},\ \sin(\beta+\gamma)=\frac{\overline{AC}}{2R},$$

因為

$$\angle A+\angle C=\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi,$$

所以

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\pi-\delta)=\sin\delta=\frac{\overline{AB}}{2R},$$

利用(1)式：

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

可得

$$\frac{\overline{BD}}{2R}\cdot\frac{\overline{AC}}{2R}=\frac{\overline{BC}}{2R}\cdot\frac{\overline{AD}}{2R}+\frac{\overline{AB}}{2R}\cdot\frac{\overline{CD}}{2R},$$

故

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$$

得證。 □

【解二】（胡照南老師／台南高商）

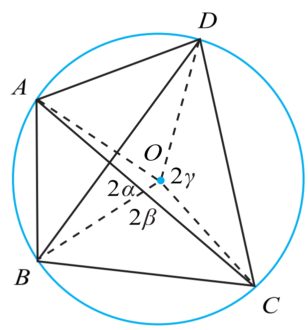
(1) $2\sin\alpha\sin\gamma+2\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta$

$$=(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\gamma}{2})+(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2})$$
$$=\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}$$
$$=-2\sin(\alpha+\beta)\sin(-\beta-\gamma)$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

所以

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

(2)



令四邊形 $ABCD$ 的外接圓半徑為 1，

$\angle AOB=2\alpha$，$\angle BOC=2\beta$，$\angle COD=2\gamma$，

則 $\overline{AB}=2\sin\alpha$，$\overline{CD}=2\sin\gamma$，

$\overline{AD}=2\sin(180°-\alpha-\beta-\gamma)$

$=2\sin(\alpha+\beta+\gamma)$，

$\overline{BC}=2\sin\beta$，

$\overline{AC}=2\sin(180°-\alpha-\beta)=2\sin(\alpha+\beta)$，

$\overline{BD}=2\sin(180°-\beta-\gamma)=2\sin(\beta+\gamma)$，

由(1)知

$$4\sin\alpha\sin\gamma+4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta$$
$$=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

得

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$ □

8-3. 設五邊形 $ABCDE$ 的五邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DE}$，$\overline{EA}$ 相等，且

$$\angle EAB=\angle ABC=\angle BCD.$$

證明：五邊形 $ABCDE$ 是正五邊形。

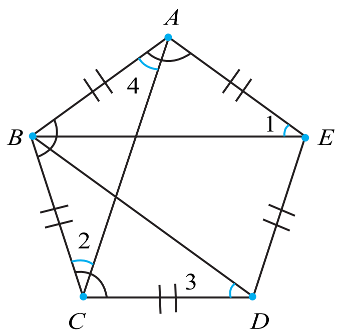
【解一】（林翠峯老師／桃園高中）

如圖，

$\triangle EAB\cong\triangle CBA\cong\triangle BCD$（SAS 全等性質），

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$EABC$ 四點共圓，$ABCD$ 四點共圓，



因為過平面上不共線 ABC 三點只可決定唯一一個圓，

$ABCDE$ 五點共圓

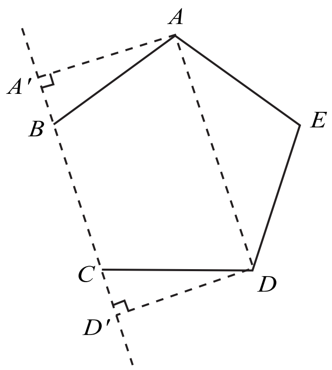
又五邊形 $ABCDE$ 五邊等長，故五邊所對的劣弧也相等，利用圓周角的性質，即可證得五內角亦相等，故得 $ABCDE$ 為正五邊形。 □

【解二】（嘉義女中一年 17 班／林偉聖老師指導）

連接 $\overline{AD}$，因為 $\angle ABC=\angle BCD$，

所以

$$\angle ABA'=\angle DCD'$$



又

$$\overline{AB}=\overline{CD}\ ,\ \angle AA'B=90^\circ=\angle DD'C\ ,$$

所以

$$\triangle ABA'\cong\triangle DCD'\text{（AAS 全等）}$$

$\Rightarrow \overline{AA'}=\overline{DD'}$

$\Rightarrow \overline{AD}\ //\ \overline{BC}$

$\Rightarrow$四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形

$\Rightarrow \angle BAD=\angle CDA$,

因為 $\overline{AE}=\overline{ED}$, 所以

$$\angle EAD=\angle EDA\ ,$$

由

$$\angle BAD=\angle CDA\ ,\ \angle EAD=\angle EDA\ ,$$

知

$$\angle CDE=\angle EAB\ ,$$

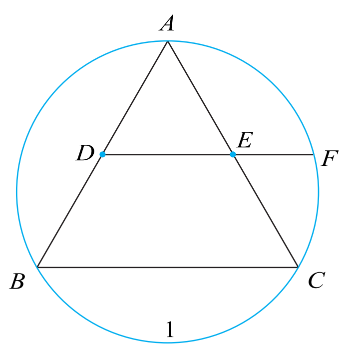
同理得證

$$\angle AED=\angle ABC\ ,$$

∵五邊形 $ABCDE$ 五邊相等且五角相等，

∴五邊形 $ABCDE$ 是正五邊形。 □

8-4. 如圖所示，



圓內接正三角形 ABC 中，D , E 分別是 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的中點，直線 DE 與圓相交於 F 點。試證：E 是 $\overline{DF}$ 的黃金分割點，即

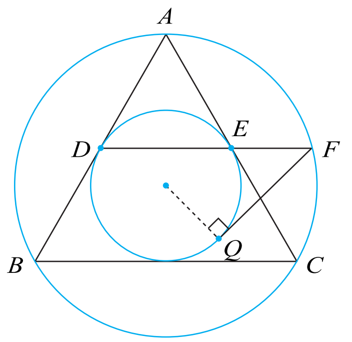
$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\ .$$

【解】（蘇億城、康竣閔、黃楚軒同學／台南一中二年 20 班）

作△ABC 內切圓，

則圓心與外接圓心重合（∵△ABC 為正△），

過 F 作 $\overline{FQ}$ 切內切圓於 Q ,



則

$$\overline{FQ}^{\,2}=R^2-r^2=\overline{CE}^{\,2}=\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2=\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2$$

$$=\overline{DE}^{\,2}\cdots①$$

又

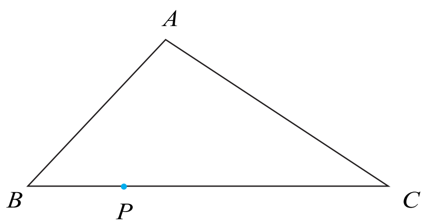
$$\overline{FQ}^{\,2}=\overline{DF}\cdot\overline{EF}\cdots②$$

由①②得

$$\overline{DE}^{\,2}=\overline{DF}\cdot\overline{EF}\ ,$$

$\therefore \dfrac{\overline{EF}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ 得證。 □

8-5. 如下圖所示：



P 在三角形 ABC 的邊 BC 上。利用直尺與圓規畫一通過 P 點，且將三角形 ABC 的面積平分的直線。

【解】（胡凱華老師／台南一中）

作法：

過 $\overline{BC}$ 中點 D 作 $\overline{DE}$ 使得 $\overline{DE} // \overline{AP}$，連接 $\overline{PE}$ 即為所求。

證明：

(1) 在梯形 $APDE$ 中，$\triangle APE = \triangle APD$，

故

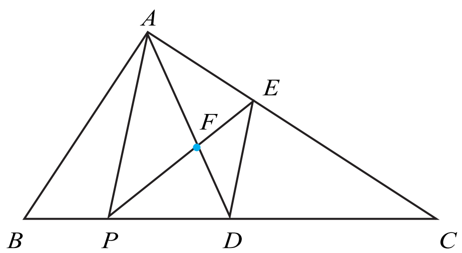
$$\triangle AEF = \triangle APE - \triangle AFP = \triangle APD - \triangle AFP$$
$$= \triangle PDF.$$

(2) D 是 $\overline{BC}$ 中點，所以

$$\triangle ABD = \triangle ACD\ .$$

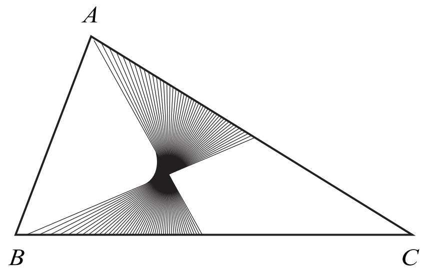
(3) 四邊形 $ABPE = \triangle ABD - \triangle PDF + \triangle AEF$

$$= \triangle ABD$$
$$= \frac{1}{2}\triangle ABC.$$



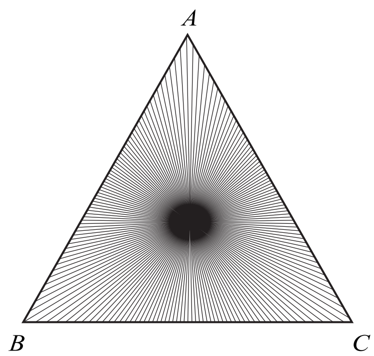
性質延伸：

(1) 當 P 點在 $\overline{BD}$ 間移動時，$\overline{PF}$ 的軌跡為一支雙曲線之包絡線，此雙曲線的漸近線為 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 的中線（圖 1）。



▲圖 1

(2) （圖 2）為所有將正 $\triangle ABC$ 平分的線段所成圖形，也就是三支雙曲線的包絡線，雙曲線的漸近線為 $\triangle ABC$ 三中線。



▲圖 2

徵答啟事

由於問題集受到全國師生的熱烈迴響，我們特別將稿件的刊登標準及酬謝方式說明如下：

一、 刊登標準：

1. 基本原則：真、善、美。

(1)真：問題必須真的被解決。

(2)善：所採取的方法或觀點最好具有一針見血的洞察力。

(3)美：數學作為一種語言，必須達到溝通的目的。事實上，放在心裏面是一件事，表達出來是另一件事，而藝術家和一般人的差別就在於表達能力。

2. 參酌項目：

(1)進稿順序：先進稿者優於後進稿者。

(2)歷史記錄：未發表過者優於已發表過者。

(3) 其他：例如，受限於本雜誌整體的篇幅限制，可能無法一一刊載。

二、 酬謝方式：來稿一經刊登，即可獲得精美禮品一份（基本上，以市面上最新出版的數學類圖書為主）。

問題集IX

9-1. 設 a , b 為實數，證明四次方程式

$$5x^4+ax^3+bx-1=0$$

有一實數根 α 滿足 $-1\le\alpha\le1$.

順便診斷一下侃庚同學的證明過程是否有誤：機靈的侃庚同學假設四次方程式的四個根分別為 α_1 , α_2 , α_3, α_4 利用根與係數的關係得到

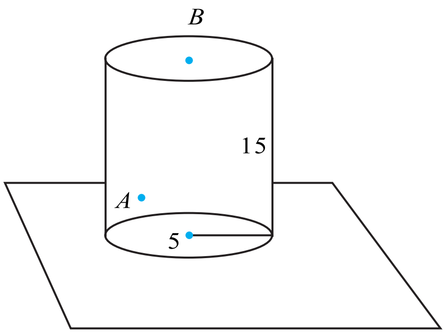
$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4=-\frac{1}{5}.$$

因為 $|\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4|=|-\frac{1}{5}|<1$，所以

$$|\alpha_1|>1\,,\,|\alpha_2|>1\,,|\alpha_3|>1\,,|\alpha_4|>1$$

是不可能同時成立的。故必有一根 α_1 滿足 $-1\le\alpha_1\le1$。

9-2. 如下圖所示，玻璃杯之形狀為圓柱形，半徑 5 公分，高為 15 公分，放在桌上。一隻螞蟻從玻璃杯外側的 A 點爬到杯口，再進入玻璃杯內側的 B 點喝水。假設 A , B 兩點的距離為 13 公分，A 點離杯底距離是 1 公分，B 點離杯底 13 公分。如果忽略不計玻璃杯的厚度，那麼螞蟻從 A 點到 B 點之最短路徑是多少公分？



9-3. 考古學家挖到一張當時某家庭的煤氣支付表，表上列舉此家庭在當年一月、二月與三月份的煤氣用量及應繳的煤氣費用：

月份	煤氣用量	煤氣費用
一月份	4 米^3	4 元
二月份	25 米^3	14 元
三月份	35 米^3	19 元

已知當時的煤氣收費標準為：

煤氣費 = 基本費 + 超額費 + 保險費。

如果每月的煤氣用量未超過基本用量，只需付基本費 3 元和每戶每月定額的保險費；若用氣量超過基本用量，超過部分每米^{3}加收固定的金額。已知當時的保險費不超過 5 元，請根據這些資訊，求出當年的「煤氣基本用量」、「保險費」及「超過部分每米^{3}加收的金額」分別是多少？

9-4. 有一種娛樂用的號碼鎖，它有三個密碼，每個密碼都是由 1 , 2 , 3 這三個數字所構成。開鎖者只要轉對其中的兩（含）個密碼以上，鎖就會自動開啟，例如當密碼為 (1 , 2 , 3) 時，轉 (1 , 3 , 2) 是不會開的（只轉對 1 個密碼），但是轉 (1 , 3 , 3) 就會打開（轉對了第 1 , 3 位置的密碼）。問：對付這種娛樂鎖，你至少需嘗試幾次才保證一定能打開。

9-5. 你和你的好朋友經常打桌球，根據過去的經驗得知：在每一局中，你獲勝的機率為 $p\,(\frac{1}{2}<p<1)$。今天你的好朋友想跟你來一場比賽，至於是採三戰兩勝，五戰三勝或者是七戰四勝的比賽制度，由你決定。問：你應採取那一種比賽制度才有較高的勝算。

（徵答截稿時間：93 年 10 月 1 日）