# 勾股定理證明-G019

## 【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

2. 連接$\overline{IG}$，並過$H,F$作$\overline{AE}$的平行線且交$\overline{IG}$於$K,T$。

3. 延長$\overrightarrow{IA},\overrightarrow{GB}$且交於$L$。

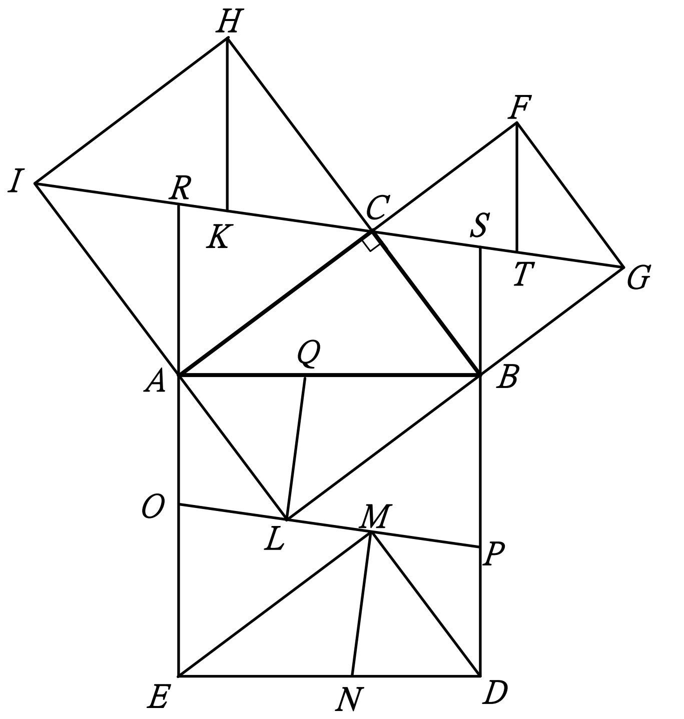
4. 過$E,D$作$\overline{AC},\overline{BC}$的平行線，且交於$M$。

5. 連接$\overleftrightarrow{LM}$，且交$\overline{AE},\overline{BD}$於$O,P$。

6. 在$\overline{DE}$上取$\overline{DN}=\overline{BS}$，並連接$\overline{MN}$。

7. 過$L$作$\overline{LQ}//\overline{MN}$。

8. 延長$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{DB}$，且與$\overline{IG}$交於$R,S$。




## 【求證過程】

先證明長方形$AEKQ$中的區域可拼合出正方形$ACHI$，再證明長方形$QKDB$中的區域可拼合出正方形$BCFG$。最後再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta ABC \cong \Delta BAL \cong \Delta EDM$ 。

因為$\overline{AB}//\overline{BC}, \overline{BL}//\overline{CA}, \angle ACB = 90°$ ，得到$\angle ALB = 90° = \angle ACB$ ，又因為

$\angle ABC = 90° - \angle ABL = \angle BAL$ ，且$\overline{AB} = \overline{AB}$，

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta BAL \text{ (AAS 全等)。}$$

因為$\overline{EM}//\overline{AC}, \overline{DM}//\overline{BC}, \angle ACB = 90°$ ，得到$\angle EMD = 90° = \angle ACB$ ，且可推得

$\angle CAB = \angle MED, \overline{AB} = \overline{ED}$ ，

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDM \text{ (AAS 全等)。}$$

因此可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAL \cong \Delta EDM \text{ ，}$$

得到$\overline{AC} = \overline{BL} = \overline{EM}, \overline{BC} = \overline{AL} = \overline{DM}$ 。

2. 證明$\Delta MND \cong \Delta LQA \cong \Delta GSB \cong \Delta CTF$ 。

因為$\overline{LQ}//\overline{MN}, \overline{AB}//\overline{ED}$，得到$\angle AQL = \angle DNM$，又因為$\overline{AL} = \overline{DM}, \angle QAL = \angle NDM$ ，

所以

$\Delta MND \cong \Delta LQA$ (AAS 全等)，得到$\overline{MN} = \overline{QL}$ 。

因為$\overline{FT}//\overline{SB}$，得到$\angle FTC = \angle BSG$(內錯角)，又因為$\angle SGB = 45° = \angle TCF, \overline{BG} = \overline{CF}$ ，

所以

$\Delta GSB \cong \Delta CTF$ (AAS 全等)，得到$\overline{SB} = \overline{TF}$ 。

因為$\angle MDN = \angle ABC = 90° - \angle CBS = \angle SBG$ ，且$\overline{DN} = \overline{SB}, \overline{DM} = \overline{BC} = \overline{BG}$ ，

所以

$\Delta MND \cong \Delta GSB$ (SAS 全等) ，得到$\overline{MN} = \overline{SG}$ 。

故

$$\Delta MND \cong \Delta LQA \cong \Delta GSB \cong \Delta CTF \text{ 。}$$

3. 證明$\Delta ENM \cong \Delta BQL \cong \Delta HKC \cong \Delta ARI$ 。

因為$\angle DMN = \angle ALQ, \angle ALB = 90° = \angle DME$ ，可推得$\angle EMN = 90° - \angle DMN = 90° -$

$\angle ALQ=\angle BLQ$，又因為 $\overline{EM}=\overline{BL},\overline{MN}=\overline{QL}$，

所以

$$\Delta ENM\cong\Delta BQL\,(\text{SAS 全等})$$

因為 $\overline{RA}//\overline{HK}$，可推得 $\angle HKC=\angle ARI$，又因為 $\angle HCR=45^\circ=\angle AIR,\overline{AI}=\overline{CH}$，

所以

$$\Delta HKC\cong\Delta ARI\quad(\text{AAS 全等})。$$

因為 $\angle NMD=\angle SGB=45^\circ=\angle QLA$，得到 $\angle BLQ=45^\circ=\angle AIR$，又因為 $\angle IAR=90^\circ-$

$\angle CAR=\angle BAC=\angle QBL$，且 $\overline{AI}=\overline{BL}$，

所以

$$\Delta BQL\cong\Delta ARI\quad(\text{ASA 全等})。$$

故

$$\Delta ENM\cong\Delta BQL\cong\Delta HKC\cong\Delta ARI\ 。$$

4. 證明 $\Delta EMO\cong\Delta BLP\cong\Delta ACR\cong\Delta HIK$ 。

因為 $\overline{AE}//\overline{BD},\overline{QL}//\overline{MN}$，得到 $\angle EOM=\angle BPL,\angle EMO=\angle BLP$ (內錯角)，又因為

$\overline{EM}=\overline{BL}$，

所以

$$\Delta EMO\cong\Delta BLP\,(\text{AAS 全等})。$$

因為 $\overline{HK}//\overline{RA}$，得到 $\angle CRA=\angle IKH$ (內錯角)，又因為 $\angle HIK=45^\circ=\angle ACR,\overline{IH}=\overline{AC}$

所以

$$\Delta ACR\cong\Delta HIK\quad(\text{AAS 全等})。$$

因為 $\angle PBL=90^\circ-\angle ABL=90^\circ-\angle BAC=\angle CAR$，且 $\angle BLP=45^\circ=\angle ACR,\overline{BL}=\overline{CA}$，

所以

$$\Delta BLP\cong\Delta ACR\,(\text{ASA 全等})。$$

故

$$\Delta EMO\cong\Delta BLP\cong\Delta ACR\cong\Delta HIK\,.$$

5. 證明 $\Delta PMD\cong\Delta OLA\cong\Delta SCB\cong\Delta TGF$ 。

因為 $\overline{AE}//\overline{BD}$，得到 $\angle AOL=\angle DPM$ (內錯角)，又因為 $\angle PDM=90^\circ-\angle EDM=90^\circ-$

$\angle BAL=\angle OAL$，且 $\overline{MD}=\overline{AL}$，

所以

$$\Delta PMD \cong \Delta OLA \text{(AAS 全等)。}$$

因為 $\overline{FT} // \overline{SB}$，可推得 $\angle FTG = \angle BSC$，又因為 $\angle BCS = \angle FGT = 45°, \overline{BC} = \overline{BG}$，

所以

$$\Delta SCB \cong \Delta TGF \text{(AAS 全等)。}$$

因為 $\overline{CG} // \overline{MP}, \overline{CB} // \overline{MD}$，可推得 $\angle CSB = \angle MPD, \angle CBS = \angle MDP$ (內錯角)，又因為

$\overline{BC} = \overline{AL} = \overline{MD}$，

所以

$$\Delta PMD \cong \Delta SCB \text{(AAS 全等)。}$$

故

$$\Delta PMD \cong \Delta OLA \cong \Delta SCB \cong \Delta TGF.$$

6. 討論正方形 $ABDE$，正方形 $ACHI$，與正方形 $BCFG$ 之面積關係。

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積} &= \Delta MND\text{面積} + \Delta LQA\text{面積} + \Delta ENM\text{面積} + \Delta BQL\text{面積} + \\ &\quad \Delta EMO\text{面積} + \Delta BLP\text{面積} + \Delta PMD\text{面積} + \Delta OLA\text{面積} \\ &= \Delta GSB\text{面積} + \Delta CTF\text{面積} + \Delta HKC\text{面積} + \Delta ARI\text{面積} + \\ &\quad \Delta ACR\text{面積} + \Delta HIK\text{面積} + \Delta SCB\text{面積} + \Delta TGF\text{面積} \\ &= (\Delta HKC\text{面積} + \Delta ARI\text{面積} + \Delta ACR\text{面積} + \Delta HIK\text{面積}) + \\ &\quad (\Delta GSB\text{面積} + \Delta CTF\text{面積} + \Delta SCB\text{面積} + \Delta TGF\text{面積}) \\ &= \text{正方形}ACHI\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積}\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積} &= \text{長方形}QKDB\text{面積} + \text{長方形}AEKQ\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**【註與心得】**

1.來源：這個證明出自於以下書籍：

Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann.

2.心得：此題證明過程，將正方形分割出若干區塊的三角形，再一一證明這些區塊全等，最後再藉由面積拼合的概念，推導出勾股定理。此題在證明過程中最關鍵的地方在於$\overline{IG}//\overline{OP}$，因此必須要先知道$\overline{IG}//\overline{OP}$，才能證明所分割出來的區塊惠泉等，整個證明過程雖然冗長但不至於複雜，因為只牽涉到三角形的全等。

3.評量

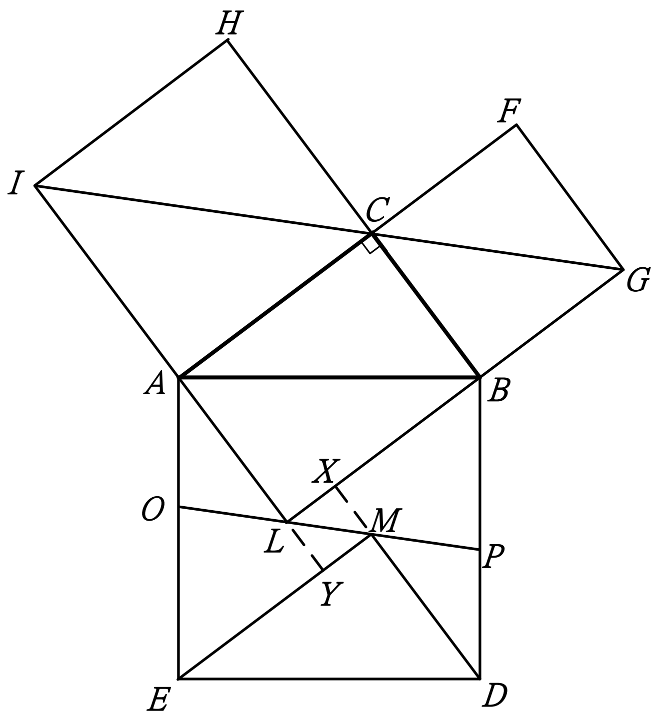
| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | | ● | |

4.補充：

(1)如圖所示，證明：$\overline{IG}//\overline{OP}$。

**【作輔助圖】**

1.延長$\overline{AL},\overline{DM}$，且交$\overline{EM},\overline{BL}$於$Y,X$。




**【求證過程】**

1. 證明$\Delta AEY \cong \Delta EDM \cong \Delta DBX \cong \Delta BAL$。

因為$\overline{AY}//\overline{BC},\overline{EM}//\overline{AC},\angle ACB = 90°$，得到$\angle AYE = 90° = \angle EMD$，又$\overline{AE} = \overline{ED}$，且

$\angle EAY = 90° - \angle AEY = \angle DEM$ ，

所以

$$\Delta AEY \cong \Delta EDM \text{ (AAS 全等)}$$

同理可證得

$$\Delta AEY \cong \Delta EDM \cong \Delta DBX \cong \Delta BAL$$

2. 證明四邊形 $LYMX$ 為正方形。

因為 $\Delta AEY \cong \Delta EDM \cong \Delta DBX \cong \Delta BAL$，得到四邊形 $LYMX$ 為矩形，且 $\overline{AY} = \overline{EM}, \overline{EY} = \overline{AL}$ ，所以 $\overline{LY} = \overline{AY} - \overline{AL} = \overline{EM} - \overline{EY} = \overline{YM}$ ，

故

四邊形 $LYMX$ 為正方形。

3. 證明 $\overline{IG} // \overline{OP}$ 。

因為四邊形 $LYMX$ 與 $BCFG$ 均為正方形，且 $\overline{LM}, \overline{CG}$ 為對角線，所以 $\angle XLM = 45° = \angle CGB$ ，

故

$\overline{IG} // \overline{OP}$ (內錯角相等)。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：