勾股定理證明-G008

【作輔助圖】

1. 任意作一正方形$WXYZ$，並作一直角三角形ABC，使$\overline{BC}=\overline{WX},\overline{AC}=2\overline{BC}$。

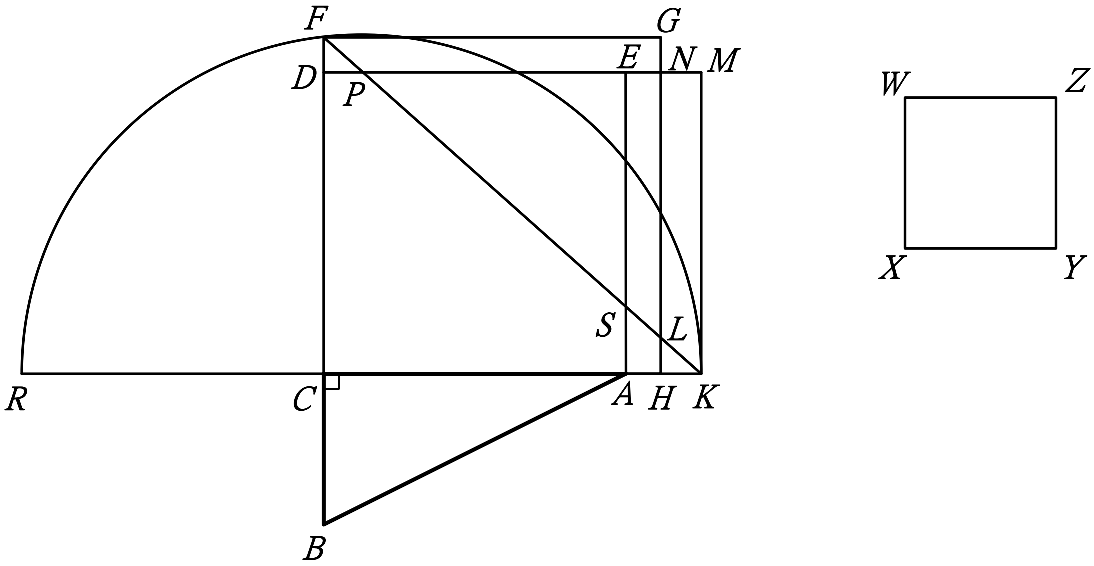
2. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACDE$。

3. 延長$\overrightarrow{CA}$，並取$\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，再作矩形$AKME$。

4. 在$\overrightarrow{AC}$上取$\overline{CR}=\overline{CD}$，並以$\overline{KR}$為直徑作半圓弧。

5. 延長$\overrightarrow{CD}$交半圓弧於點F，再以$\overline{CH}$為邊長向右作一正方形$CFGH$。

6. 連接$\overline{FK}$，且與$\overline{DE},\overline{EA},\overline{GH}$分別交於點$P,S,L$。



【求證過程】

先證明$\overline{FD}=\overline{LH}$，及$\Delta FDP\cong\Delta LHK$，再證明$\Delta FGL\cong\Delta PMK$，並且說明矩形$AKME$面積等於正方形$WXYZ$面積，最後討論正方形$HCGF$與正方形$ACDE$及矩形$AKME$之面積關係，再利用 G002 所得到的結果即可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\overline{FD}=\overline{LH}$

因為$\overline{AC}=2\overline{BC}=\overline{CR}=2a$ (不仿令$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b$)，又$\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}a$，得到

$\overline{CK}=\frac{5}{2}a$。

因為$\angle RFK=90°=\angle FCK$，可由比例中項推得

$$\overline{CF}^2=\overline{CR}\times\overline{CK}=2a\times\frac{5}{2}a=5a^2$$，即

$$\overline{CF}=\sqrt{5}a=\overline{CH}.$$

因為$\overline{LH}//\overline{FC}$，可知$\overline{LH}:\overline{FC}=\overline{KH}:\overline{KC}$，即

$$\overline{LH}:\sqrt{5}a=\frac{5}{2}a-\sqrt{5}a:\frac{5}{2}a$$

可得

$$\overline{LH}=\sqrt{5}a-2a=\overline{FD}.$$

2. 再證明$\Delta FDP\cong\Delta LHK$

因為四邊形$ACDE,HCFG$為正方形，可知$\overline{FC}//\overline{GH}$，而得到$\angle FDP=\angle LHK=90°$

且$\angle DFP=\angle HLK$(同位角相等)，又$\overline{FD}=\overline{LH}$，所以

$$\Delta FDP\cong\Delta LHK$$ (ASA 全等)。

3. 證明$\Delta FGL\cong\Delta PMK$

因為$\Delta FDP\cong\Delta LHK$，得到$\overline{FP}=\overline{LK}$，所以

$$\overline{FP}+\overline{PL}=\overline{LK}+\overline{PL}$$，即$\overline{FL}=\overline{PK}$.

又因為$\angle G=\angle M=90°,\angle GFL=\angle MPK$(同位角相等)，所以

$$\Delta FGL\cong\Delta PMK$$(AAS 全等)

4. 證明矩形$AKME$面積等於正方形$WXYZ$面積。

因為$\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{WX}$，且$\overline{AE}=\overline{AC}=2\overline{BC}$，所以

$$AKME\text{面積}=\overline{AK}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{BC}\times 2\overline{BC}$$
$$=\overline{BC}^2=\overline{WX}^2$$

5. 討論矩形 $HCFG, ACDE, AKME, WXYZ$ 的面積關係

因為 $\Delta FGL \cong \Delta PMK$ ，所以

$$\text{四邊形}GNPF\text{面積} = \text{四邊形}MNLK\text{面積}$$

又因為 $\Delta FDP \cong \Delta LHK$ 且矩形 $AKME$ 面積等於正方形 $WXYZ$ 面積，所以

$$\begin{aligned}\text{正方形}HCFG\text{面積} &= \text{正方形}ACDE\text{面積} + \Delta FDP\text{面積} + \\ &\quad\ \text{四邊形}GNPF\text{面積} + \text{矩形}AHNE\text{面積} \\ &= \text{正方形}ACDE\text{面積} + \Delta LHK\text{面積} + \\ &\quad\ \text{四邊形}MNLK\text{面積} + \text{矩形}AHNE\text{面積} \\ &= \text{正方形}ACDE\text{面積} + \text{矩形}AKME\text{面積} \\ &= \text{正方形}ACDE\text{面積} + \text{矩形}WXYZ\text{面積}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\text{正方形}HCFG\text{面積} &= \overline{AC}^2 + \overline{WX}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

因為 $\overline{AC} = 2\overline{BC} = 2\overline{WX}$ ，所以根據 G002 可知

$$\overline{AC}^2 + \overline{WX}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

即

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1.來源

2.心得：此證明是延續 G002 的另一種證明方式。先作一兩股比為 $2:1$ 的直角三角形，再較長邊的股為邊長向外作正方形 $ACDE$，再向此正方形右邊繼續延伸一個以 $\overline{BC}$ 長一半為底邊的矩形 $AKME$ 。接著以 $2\overline{AC} + \overline{AK}$ 為直徑作半圓，再作出正方形 $HCFG$ 。藉由討論矩形 $HCFG, ACDE, AKME, WXYZ$ 的面積關係，可得到 $\overline{AC}^2$ 與 $\overline{BC}^2$ 的和等於正方形 $HCFG$ 的面積，再藉由 G002 的結果，即可推得勾股定理的關係式。此證明並未直接證明出勾股定理的關係式，而是正方形與矩形間的面積關係，先導出直角三角形兩股平方和，再藉由 G002 所推得的結論，加以說明兩股平方和等於斜邊平方。對國中生而言，此證明過程不難理解，但

由於它並未直接推導出結論，而是再搭配 G002 的結論加以說明，因此反而提升了理解上的難度。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	