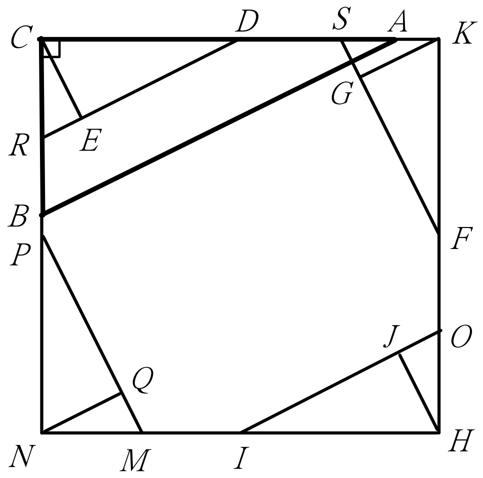
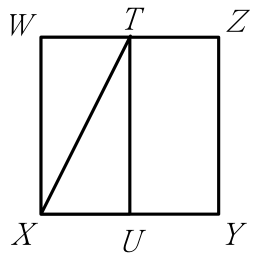
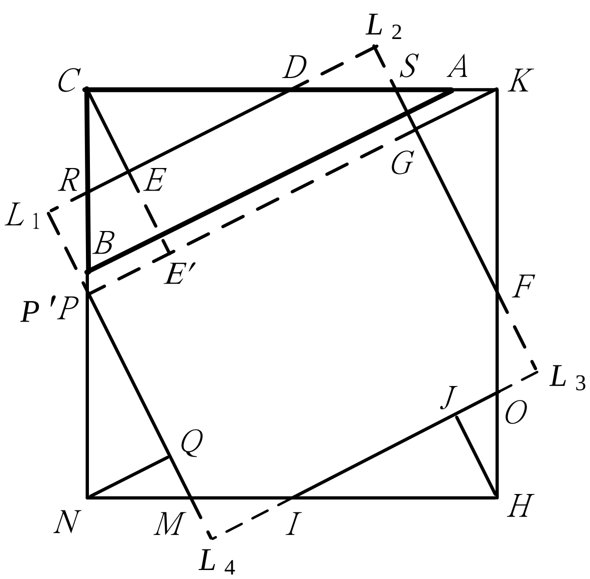
勾股定理證明-G003

【作輔助圖】

1. 任意作一正方形$WXYZ$，並作一直角三角形ABC，使$\overline{BC}=\overline{WX},\overline{AC}=2\overline{BC}$。
2. 在正方形$WXYZ$中，作$\overline{TU}$垂直平分$\overline{WZ},\overline{XY}$，並連接$\overline{XT}$。
3. 以$\overline{AC}$為邊長作一正方形$CKHN$。
4. 在正方形$CKHN$中，在四邊上向內作與ΔXTU全等的$\Delta CDE,\Delta KFG,\Delta HIJ,\Delta NPQ$。
5. 延長$\overline{DE},\overline{FG},\overline{IJ},\overline{PQ}$，分別與正方形$CKHN$四邊相交於$R,S,O,M$。







【求證過程】

先設法證明$\overrightarrow{KG}$通過點P，且與$\overline{DR}$平行，再證明$\overrightarrow{DR},\overrightarrow{MP},\overline{CP}$所建構的$\Delta PRL_1$與$\Delta CRE$全等。再說明$\Delta CRE,\Delta KSG,\Delta HOJ,\Delta NMQ$與八邊形$PRDSFOIM$恰可拼合出以$\overline{AC}$為邊長的正方形，且$\Delta CDE,\Delta KFG,\Delta HIJ,\Delta NPQ$恰可拼合出以$\overline{BC}$為邊長的正方形，藉由正方形$CNHK$的分割，及面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta CDR,\Delta KFS,\Delta HIO,\Delta NPM$為全等三角形，而得到
$\Delta CRE \cong \Delta KSG \cong \Delta HOJ \cong \Delta NMQ$.

因為$\Delta CDE \cong \Delta KFG$，可知$\overline{CD}=\overline{KF}, \angle CDR=\angle KFG$，又$\angle C=\angle K=90^\circ$，所以，

$$\Delta CDR \cong \Delta KFS \text{ (ASA 全等)}$$

同理可推得

$$\Delta CDR \cong \Delta KFS \cong \Delta HIO \cong \Delta NPM \quad \text{且 } \Delta CRE \cong \Delta KSG \cong \Delta HOJ \cong \Delta NMQ.$$

2. 證明$\overline{DR}//\overrightarrow{KG}$

因為$\angle KGF=90^\circ=\angle SKF$，且$\Delta CDE \cong \Delta KFG$，可推得$\angle SKG+\angle FKG=90^\circ=\angle FKG+\angle KFG$，且$\angle CDE=\angle KFG$，所以

$$\angle SKG=\angle KFG=\angle CDE \text{ (同位角)}$$

故

$$\overline{DR}//\overrightarrow{KG}.$$

3. 證明$\overrightarrow{KG}$通過P點。

延長$\overrightarrow{KG}$，且與$\overline{CN}$交於P'，再延長$\overline{CE}$，且與$\overrightarrow{KG}$交於E'。

根據 G002，證明步驟 5. 可知$\overline{CD}=\overline{XT}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{CK}$，即$D$為$\overline{CK}$的中點，同理可證得$F,I,B$亦為正方形$CKHN$邊上的中點。

因為$\overline{DR}//\overrightarrow{KG}$，且$\angle CED=90^\circ$及$D$為$\overline{CK}$的中點，可得$\angle CE'P'=90^\circ$，且$\overline{CE'}=2\overline{CE}=2\overline{XU}=\overline{TU}=\overline{DE}$，又$\angle E'CP'=\angle CDE$，所以

$$\Delta CP'E' \cong \Delta DCE \text{ (ASA 全等)}，得到 \overline{CP'}=\overline{CD}$$

因為 D,F,I,B 為正方形 $CKHN$ 邊上的中點，且 $\Delta CDR \cong \Delta NPM$ ，所以

$$\overline{CP'} = \overline{CD} = \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{CN}$$

故

$$P' = P \text{ ，即 } \overrightarrow{KG} \text{ 通過 } P \text{ 點。}$$

4. 討論八邊形 $PRDSFOIM$ 的面積與 $\Delta CRE, \Delta KSG, \Delta HOJ, \Delta NMQ$ 面積的關係。

(1)

延長 $\overleftrightarrow{DR}, \overleftrightarrow{SF}, \overleftrightarrow{IJ}, \overleftrightarrow{PM}$ ，使其兩兩相交於 L_1, L_2, L_3, L_4.

因為 D 為 $\overline{CK}$ 的中點，且 $\overline{DR} // \overline{KP}$ ，得到 $\overline{CR} = \overline{RP}$.

因為 $\angle L_1PR = \angle NPQ$(對頂角) $= \angle CDE = \angle RCE$ ，且 $\angle L_1RP = \angle CRE$(對頂角) ，所以

$$\Delta PRL_1 \cong \Delta CRE \quad \text{(ASA 全等)}$$

同理可證得

$$\Delta DSL_2 \cong \Delta KSG, \Delta FOL_3 \cong \Delta HOJ, \Delta IML_4 \cong \Delta NMQ$$

因為 $\Delta CRE \cong \Delta KSG \cong \Delta HOJ \cong \Delta NMQ$ ，可知

$$\Delta DSL_2 \cong \Delta KSG \cong \Delta FOL_3 \cong \Delta HOJ \cong \Delta IML_4 \cong \Delta NMQ$$

故可推得

$$\angle L_1 = \angle L_2 = \angle L_3 = \angle L_4 = 90^\circ \text{ 且四邊形 } L_1L_2L_3L_4 \text{ 四邊等長，}$$

即 $L_1L_2L_3L_4$ 為正方形

(2)

因為 $\overline{DE} = \overline{TU}$(令 $= a$)$, \overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{TU} (= \frac{1}{2}a)$ ，且 $\overline{CE}^2 = \overline{ER} \times \overline{ED}$ ，可推得 $\overline{ER} = \frac{1}{4}a$.

因為 $\overline{L_1R} = \overline{ER}, \overline{L_2D} = \overline{CE}$ ，得到 $\overline{L_1L_2} = 2a = \overline{AC}$ ，所以

$$\begin{aligned}
&\text{八邊形}PRDSFOIM\text{的面積} + \Delta CRE + \Delta KSG + \Delta HOJ + \Delta NMQ \\
&= \text{八邊形}PRDSFOIM\text{的面積} + \Delta PRL_1 + \Delta DSL_2 + \Delta FOL_3 + \Delta IML_4 \\
&= \text{正方形}L_1L_2L_3L_4\text{面積} \\
&= \overline{L_1L_2}^2 \\
&= \overline{AB}^2
\end{aligned}$$

5. 討論正方形$CNHK$的面積分割，進而推出勾股定理的關係式：
因為$\Delta CDE \cong \Delta KFG \cong \Delta HIJ \cong \Delta NPQ \cong \Delta XTU$，所以

$$\Delta CDE + \Delta KFG + \Delta HIJ + \Delta NPQ = \text{正方形}WXYZ\text{面積}$$

故

$$\begin{aligned}\text{正方形}CNHK\text{面積} &= \Delta CDE + \Delta KFG + \Delta HIJ + \Delta NPQ + \\ &\quad \text{八邊形}PRDSFOIM\text{的面積} + \Delta CRE + \\ &\quad \Delta KSG + \Delta HOJ + \Delta NMQ \\ &= \text{正方形}WXYZ\text{面積} + \text{正方形}L_1L_2L_3L_4\text{面積}\end{aligned}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源

2.心得：此證明是延續 G002，以任意正方形$WXYZ$為邊長，作一兩股比為$2:1$的直角三角形，再以斜邊及較長邊的股為邊長向外作正方形。利用短股邊上的正方形切割成四片全等直角三角形，再分別拚合在以斜邊為邊長的正方形上。此證明較為複雜，對於國中生而言較難以理解，但是若能以實際的教具操作，應當是可以清楚地了解到勾股定理與面積之間的幾何意義。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	