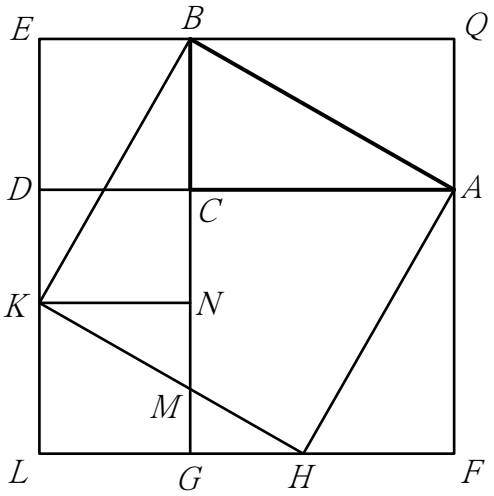
勾股定理證明-G001

【作輔助圖】

1. 作一正方形 $ELFQ$，並在 $ELFQ$ 內在作一正方形 $EDCB$。
2. 在 $\overline{EL},\overline{LF}$ 上取 K,G,H，使 $\overline{LK}=\overline{LG}=\overline{HF}=\overline{ED}$。
3. 連接 $\overline{CG}$，並過 K 作 $\overline{KN}\perp\overline{CG}$ 且交 $\overline{BG}$ 於 N。
4. 延長 $\overrightarrow{DC}$ 交 $\overline{QF}$ 於 A。
5. 連接 $\overline{BK},\overline{KH},\overline{HA},\overline{AB}$。



【求證過程】

證明正方形 $ABKH$ 面積所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $KLGN$ 的面積加上正方形 $ACGF$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 先說明四邊形 $KLGN$ 為正方形，且其面積等於正方形 $EDCB$ 面積。

   因為 $\overline{KL}=\overline{LG}$ 且 $\overline{KN}\perp\overline{NG},\angle KLG=90°$，所以

   四邊形 $KLGN$ 為正方形。

   又因為 $\overline{KL}=\overline{ED}$ 且四邊形 $EDCB$ 為正方形，所以

   正方形$KLGN$面積 $=$ 正方形$EDCB$面積。

2. 再證明 $\Delta AHF\cong\Delta ABC$。

   因為 $\overline{EQ}=\overline{QF},\overline{EB}=\overline{BC}=\overline{QA}$，得 $\overline{AC}=\overline{EQ}-\overline{EB}=\overline{QF}-\overline{QA}=\overline{AF}$，又 $\overline{ED}=\overline{BC}=\overline{HF}$，

   且 $\angle BCA=90°=\angle HFA$，所以

   $\Delta AHF\cong\Delta ABC$ (SAS 全等)

3. 再證明$\Delta KLH \cong \Delta KNB$

因為$\overline{EL}=\overline{LF}, \overline{NG}=\overline{KL}=\overline{HF}$，得$\overline{BN}=\overline{EL}-\overline{KL}=\overline{LF}-\overline{HF}=\overline{LH}$，又$\overline{KN}=\overline{KL}$，且$\angle BNK=90°=\angle HLK$，所以

$$\Delta KLH \cong \Delta KNB \quad \text{(SAS 全等)}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta ABC+\Delta BKN+\Delta KNM+\text{四邊形}ACMH \\
&= \Delta AHF+\Delta KCH+\Delta KNM+\text{四邊形}ACMH \\
&= \Delta AHF+(\text{四邊形}KLGM+\Delta MGH)+\Delta KNM+\text{四邊形}ACMH \\
&= (\Delta AHF+\Delta MGH+\text{四邊形}ACMH)+(\text{四邊形}KLGM+\Delta KNM) \\
&= \text{正方形}ACGF+\text{正方形}KLGN \\
&= \text{正方形}ACGF+\text{正方形}EDCB \text{ 。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2.$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍

Row, T.S. (1958) *Geometric exercises in paper folding*. Peter Smith Pub.p14.

F. C Boon (1924) *A companion to elementary school mathematics*.p102.

2.心得：此題證明方式不難理解，透過面積的切割即可推導出勾股定理，在教學上可以引導學生往切割的概念思考，但就國中生而言較難自己得出這樣的方向。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充