勾股定理證明-G002

【作輔助圖】

1. 任意作一正方形$WXYZ$，並作一直角三角形ABC，使$\overline{BC}=\overline{WX},\overline{AC}=2\overline{BC}$。

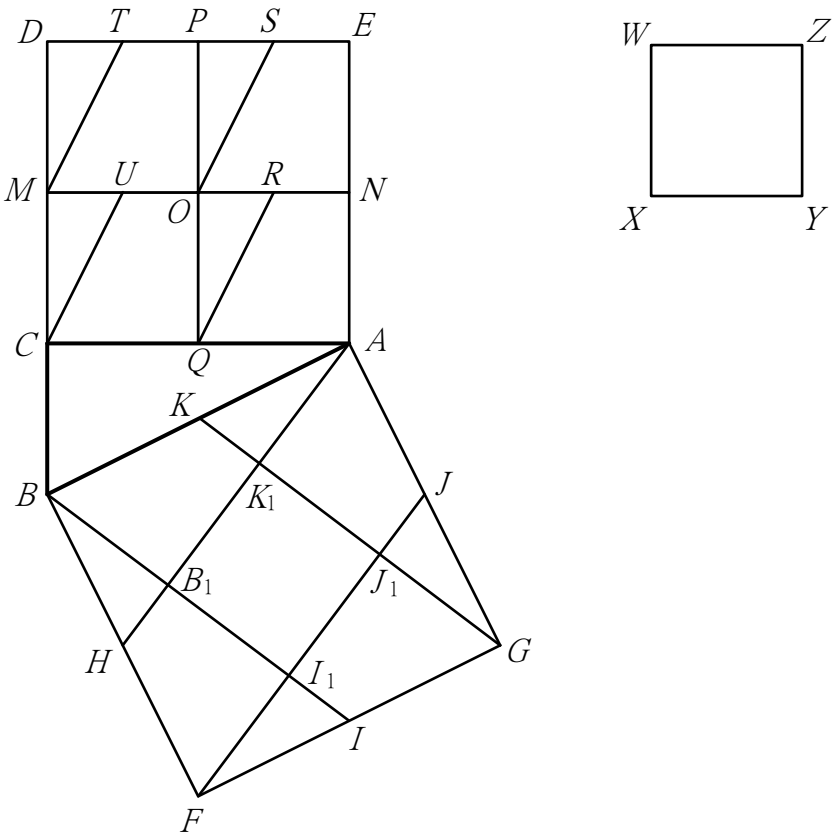
2. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACDE$，並取四邊的中點M,Q,N,P。

3. 連接$\overline{MN},\overline{PQ}$，且相交於 O 點。

4. 取$\overline{DP},\overline{PE},\overline{MO},\overline{ON}$的中點$T,S,U,R$，並連接$\overline{TM},\overline{SO},\overline{UC},\overline{RQ}$。

5. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABFG$，並取四邊的中點K,H,I,J。

6. 連接$\overline{AH},\overline{BI},\overline{FJ},\overline{GK}$。



【求證過程】

先證明正方形$K_1B_1I_1J_1$與正方形$WXYZ$全等，再證明正方形$WXYZ$與正方形$ACDE$

所切割出來的四片全等三角形、及四片全等四邊形，皆是拼合出正方形 $ABFG$ 的區域，最後利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\overline{AH}//\overline{JF},\overline{BI}//\overline{KG}$，進而得到四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為平行四邊形

   正方形 $ABFG$ 中，由作圖 5.知 $\overline{BK}=\overline{IG},\overline{BK}//\overline{IG}$ 且 $\overline{AJ}=\overline{HF},\overline{AJ}//\overline{HF}$，可推得四邊形 $KBIG,AJFH$ 均為平行四邊形，所以

   $\overline{BI}//\overline{KG},\overline{AH}//\overline{JF}$，得四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為平行四邊形。

2. 證明 $\Delta ABH\cong\Delta BFI$，進而推得 $\angle BB_1H=90°$，且四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為矩形

   因為 $\overline{AB}=\overline{BF},\overline{BH}=\overline{FI},\angle ABH=90°=\angle BFI$，所以

   $\Delta ABH\cong\Delta BFI$ (SAS 全等)，

   可得 $\angle BAH=\angle FBI$，又 $\angle BAH+\angle AHB=90°$，得到 $\angle FBI+\angle AHB=90°$，所以

   $\angle BB_1H=90°$。

   又由 1.，因為四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為平行四邊形，且 $\angle BB_1H=90°$，所以

   四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為矩形。

3. 證明 $\Delta ABB_1\cong\Delta BFI_1\cong\Delta FGJ_1\cong\Delta GAK_1$，進而推得四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為正方形。

   因為 $\overline{AB}=\overline{BF},\angle BAB_1=\angle FBI_1,\angle AB_1B=90°=\angle BI_1F$，所以 $\Delta ABB_1\cong\Delta BFI_1$ (AAS 全等)，同理可證得

   $\Delta ABB_1\cong\Delta BFI_1\cong\Delta FGJ_1\cong\Delta GAK_1$ (AAS 全等)

   可得 $\overline{BB_1}=\overline{FI_1}=\overline{GJ_1}=\overline{AK_1}$，

   因為 $\overline{AK}=\overline{BK},\overline{KK_1}//\overline{BB_1}$，得到 $\overline{AK_1}=\overline{K_1B_1}$，同理可推得 $\overline{BB_1}=\overline{B_1I_1},\overline{FI_1}=\overline{I_1J_1},$

   $\overline{GJ_1}=\overline{J_1K_1}$，即 $\overline{BB_1}=\overline{FI_1}=\overline{GJ_1}=\overline{AK_1}=\overline{K_1B_1}=\overline{B_1I_1}=\overline{I_1J_1}=\overline{J_1K_1}$，所以

   四邊形 $K_1B_1I_1J_1$ 為正方形。

4. 證明 $\Delta ABB_1\cong\Delta ABC$，進而推得正方形 $K_1B_1I_1J_1$ 與正方形 $WXYZ$ 全等。

因為$\overline{AB_1}:\overline{BB_1}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$，且$\angle AB_1B=90^\circ=\angle ACB$，得到$\Delta ABB_1\sim\Delta ABC$(SAS 相似)，可知$\overline{AB}:\overline{AB}=\overline{AB_1}:\overline{AC}=\overline{BB_1}:\overline{BC}$，所以

$$\Delta ABB_1\cong\Delta ABC\ \text{(SSS 全等)}$$

得到$\overline{BB_1}=\overline{BC}$，又$\overline{BB_1}=\overline{B_1K_1},\overline{BC}=\overline{WX}$，且四邊形$K_1B_1I_1J_1$與四邊形$WXYZ$均為正方形，所以

正方形$K_1B_1I_1J_1$與正方形$WXYZ$全等。

5. 證明$\Delta QRO\cong\Delta AKQ$，四邊形$QRNA\cong$四邊形$BKQC$。

因為$\overline{QO}=\overline{AQ},\overline{QK}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{ON}=\overline{OR},\angle QOR=90^\circ=\angle AQK$，所以

$$\Delta QRO\cong\Delta AKQ\text{(SAS 全等)}$$

得到$\angle OQR=\angle QAK,\overline{QR}=\overline{AK}$

因為$\angle OQR+\angle RQA=90^\circ=\angle QAK+\angle ABC$，可知$\angle RQA=\angle ABC$，即$\angle RQA=\angle KBC$，

又$\angle RNA=\angle KQC=90^\circ=\angle QAN=\angle QCB$，且$\overline{AN}=\overline{QC},\overline{AQ}=\overline{BC},\overline{RN}=\overline{OR}=\overline{QK},$

$\overline{RQ}=\overline{AK}=\overline{KB}$，

所以

四邊形$QRNA\cong$四邊形$BKQC$。

6. 討論面積關係：

因為$\Delta ABB_1\cong\Delta ABC,\Delta QRO\cong\Delta AKQ,$四邊形$QRNA\cong$四邊形$BKQC$，所以

$$\begin{aligned}\Delta ABB_1\text{面積}&=\Delta ABC\text{面積}\\&=\Delta AKQ\text{面積}+\text{四邊形}BKQC\text{面積}\\&=\Delta QRO\text{面積}+\text{四邊形}QRNA\text{面積}\\&=\text{正方形}OQAN\text{面積}\end{aligned}$$

同理可推得

$$\Delta BFI_1\text{面積}=\Delta CUM\text{面積}+\text{四邊形}CUOQ\text{面積}=\text{正方形}MCQO\text{面積}$$
$$\Delta FGJ_1\text{面積}=\Delta MTD\text{面積}+\text{四邊形}MTPO\text{面積}=\text{正方形}DMOP\text{面積}$$
$$\Delta GAK_1\text{面積}=\Delta OSP\text{面積}+\text{四邊形}OSEN\text{面積}=\text{正方形}PONE\text{面積}$$

7. 最後，整理上述面積關係，推得勾股定理關係式：

$$\begin{aligned}&\text{正方形}ABFG\text{面積}\\&=\Delta ABB_1\text{面積}+\Delta BFI_1\text{面積}+\Delta FGJ_1\text{面積}+\Delta GAK_1\text{面積}+\text{正方形}K_1B_1I_1J_1\text{面積}\\&=\text{正方形}ACDE\text{面積}+\text{正方形}WXYZ\text{面積}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{AC}^2+\overline{WX}^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：

2.心得：此證明是以任意正方形 $WXYZ$ 為邊長，作一兩股比為 $2:1$ 的直角三角形，再以斜邊及較長邊的股為邊長向外作正方形，利用各邊中點與頂點連線將正方形切割若干區塊，再利用圖形的全等關係，這些區塊的面積轉換成正方形 $ACDE$ 面積、正方形 $ABFG$ 面積以及正方形 $WXYZ$ 的面積，最後再推導出三個正方形的面積關係。此證明只要證明圖形之間的全等關係，就能順利推導出勾股定理的關係式。對國中生而言，此證明較為複雜，整個證明過程過於冗長，不易理解。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：