勾股定理證明-G005

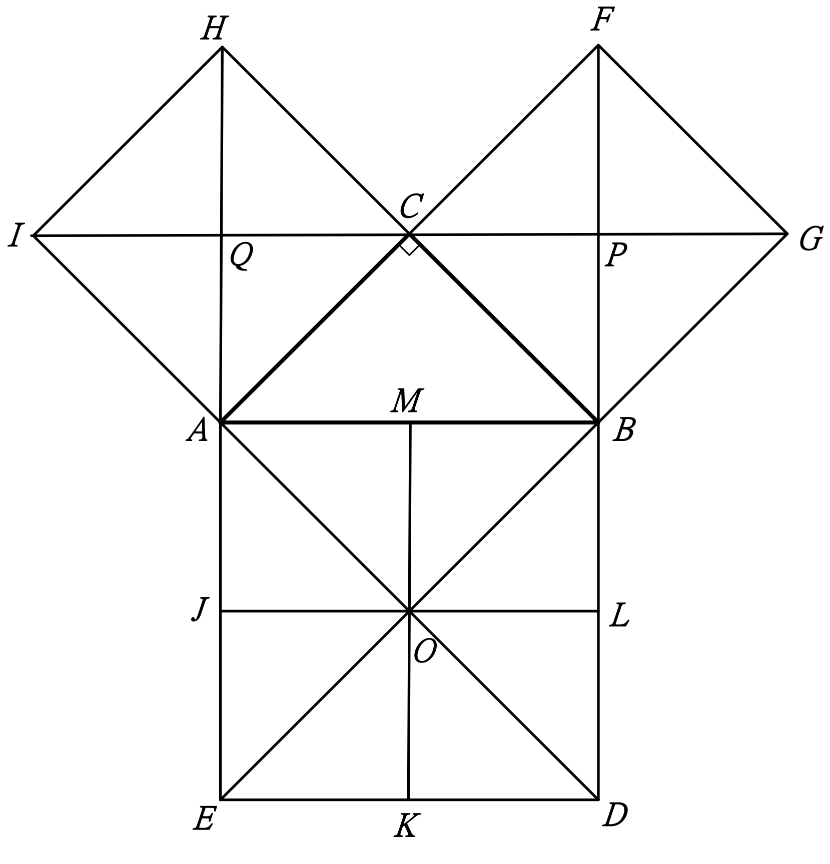
【作輔助圖】

1. 作一直角三角形 ABC，使 $\overline{AC}=\overline{BC}$。

2. 以 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE, ACHI, BCFG$。

3. 連接 $\overline{AH},\overline{CI},\overline{BF},\overline{CG},\overline{AD},\overline{BE}$。

4. 取正方形 $ABDE$ 四邊之中點 M, J, K, L，並連接 $\overline{MK},\overline{JL}$。



【求證過程】

先證明 ΔPCB 與 ΔBMO 全等，再討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 所切割出來的八片全等直角三角形，皆是拼合出正方形 $ABDE$ 的區域，利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\Delta PCB \cong \Delta BMO$

因為 $\angle CBA=\angle CAB=45°=\angle ABO=\angle BAO$, 又 $\overline{AB}=\overline{AB}$，所以 $\Delta ABC \cong \Delta ABO$ (ASA 全等)，得到 $\overline{BC}=\overline{BO}$。

因為 $\angle CPB = 90° = \angle BMO, \angle PBC = 45° = \angle MBO, \overline{BC} = \overline{BO}$ ，所以

$$\Delta PCB \cong \Delta BMO \text{(AAS 全等)}$$

2. 討論正方形 $ABDE, ACHI, BCFG$ 中的直角三角形關係：

因為四邊形 $ACHI, BCFG$ 為正方形，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ACHI\text{面積} &= 4 \times \Delta ACQ\text{面積} \\
&= 4 \times \Delta BPC\text{面積} \\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積}
\end{aligned}$$

因為 $\Delta PCB \cong \Delta BMO$ ，且四邊形 $ABDE$ 為正方形，所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= 8 \times \Delta BMO\text{面積} \\
&= 8 \times \Delta PCB\text{面積} \\
&= 8 \times \Delta ACQ\text{面積} \\
&= 4 \times \Delta ACQ\text{面積} + 4 \times \Delta PCB\text{面積}
\end{aligned}$$

3. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積} = \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Beman, Smith (1899) *New plane and solid geometry*.p103.

2.心得：此題先以三邊為邊長向外作正方形，再透過頂點連線的分割，將三個正方形分割成若干塊全等三角形。此證明只需證明三角形間的全等關係，再透過面積的關係，即可推導出勾股定理。此題是一個特殊的等腰直角三角形，因此在切割方面很容易就可判斷出彼此間的全等關係，對於國中生而言不難理解。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：