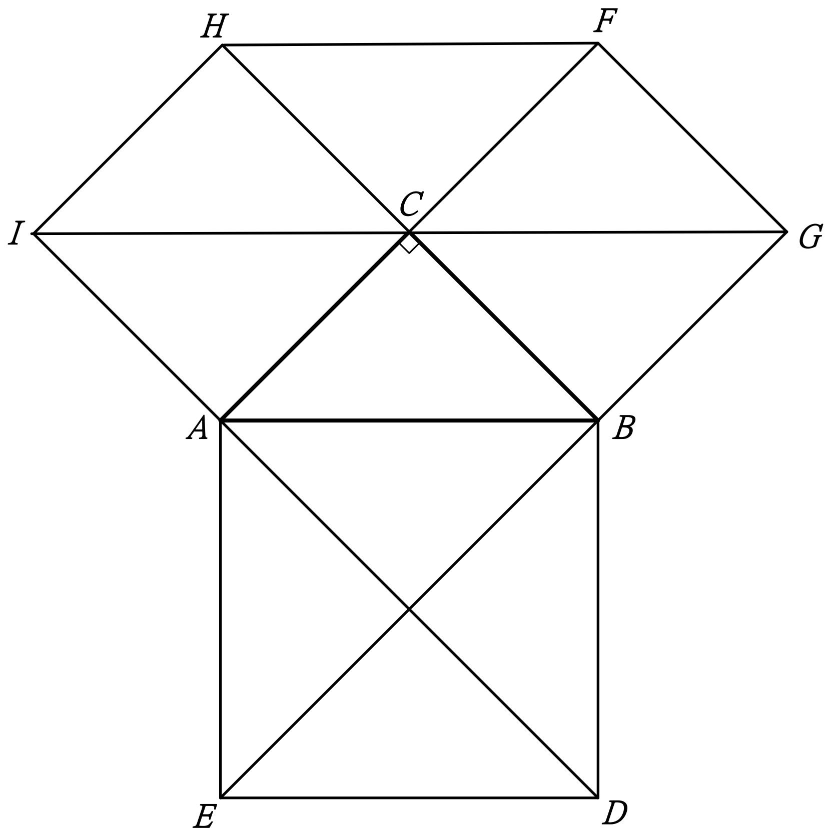
勾股定理證明-G006

【作輔助圖】

1. 作一直角三角形 ABC ，使 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 。

2. 以 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE, ACHI, BCFG$ 。

3. 連接 $\overline{CI},\overline{CG},\overline{AD},\overline{BE},\overline{HF}$ 。



【求證過程】

先證明 $\Delta ABC, \Delta FHC$ 與 ΔGCB 全等 ，再討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 所切割出來的四片全等等腰直角三角形，可拼合出正方形 $ABFH$ 的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\Delta ABC \cong \Delta FHC \cong \Delta GCB$

   因為四邊形 $ACHI, BCFG$ 為正方形，且 $\angle ACB=90°$，得到 $\angle ACB=90°=\angle HCF$ ，且

   $\overline{HC}=\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{CF}$ ，所以

   $\Delta ABC \cong \Delta FHC$ (SAS 全等)。

因為四邊形 $BCFG$ 為正方形，且 $\angle ACB = 90°$，得到 $\angle ACB = 90° = \angle CBG$，且

$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BG}$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta GCB \text{(SAS 全等)。}$$

因此可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta FHC \cong \Delta GCB$$

2. 討論正方形 $ACHI, BCFG$ 中的四片等腰直角三角形與正方形 $ABFH$ 的關係：

因為 $\overline{HC} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CF}$，且 $\angle ACB = 90° = \angle HCF$，可得到四邊形 $ABFH$ 為正方形，所以

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABFH\text{面積} &= 4\times\Delta ABC\text{面積}\\ &= 2\times\Delta BGC\text{面積}+2\times\Delta ACI\text{面積}\\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

3. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積} &= \text{正方形}ABFH\text{面積}\\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源

2.心得：此題與 G005 都是以等腰直角三角形為主架構，先以三邊為邊長向外作正方形，再透過頂點連線的分割，將三個正方形分割成若干塊全等三角形，然而此題分割方式較 G005 簡單，至於證明依然只需證明三角形間的全等關係，再透過面積的關係，即可推導出勾股定理。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充