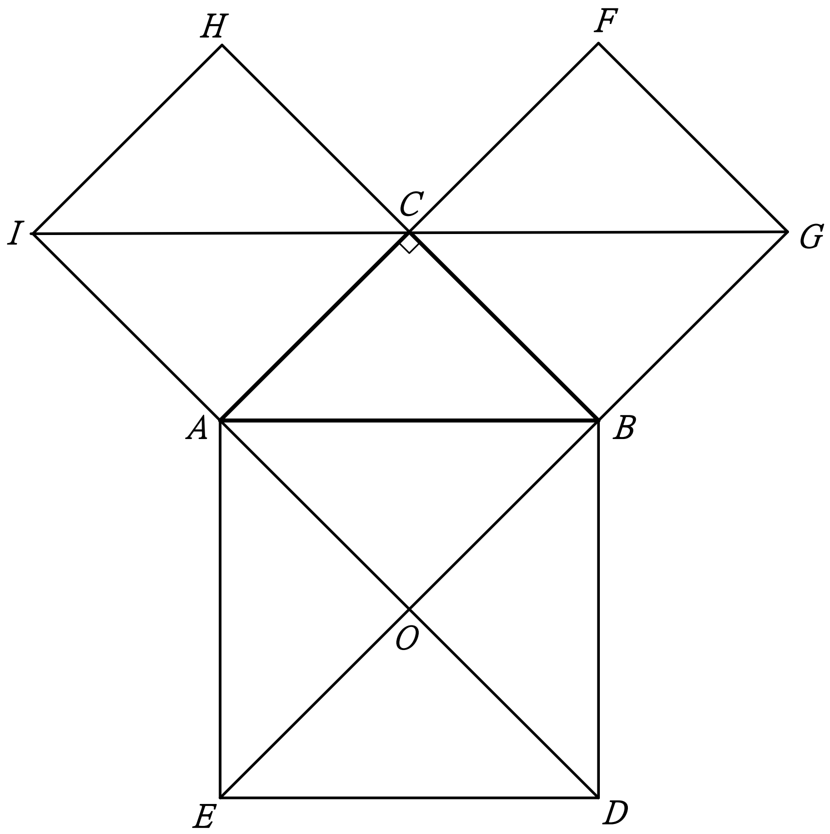
# 勾股定理證明-G007

**【作輔助圖】**

1. 作一直角三角形$ABC$，使$\overline{AC}=\overline{BC}$。

2. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

3. 連接$\overline{CI},\overline{CG},\overline{AD},\overline{BE}$，且$\overline{AD},\overline{BE}$相交於$O$點。




**【求證過程】**

先證明$\Delta BGC$與$\Delta OBA$全等，再討論正方形$ACHI$與正方形$BCFG$所切割出來的四片全等的等腰直角三角形，皆是拼合出正方形$ABDE$的區域，利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明四邊形$ABGC$為平行四邊形，進而推得$\overline{CG}=\overline{AB}$

因為四邊形$BCFG$為正方形，且$\overline{AC}=\overline{BC}$，得到$\overline{AC}=\overline{BG}$，又因為$\angle ACB=90^\circ=\angle CBG$，所以$\overline{AC}//\overline{BG}$，

故

$$\text{四邊形 } ABGC \text{ 為平行四邊形，}$$

得到

$$\overline{CG} = \overline{AB} \text{。}$$

2. 再證明 $\Delta BGC \cong \Delta OBA$

因為四邊形 $ABDE$ 為正方形，得到 $\angle ABO = 45° = \angle BCG$ 且 $\angle AOB = 90° = \angle CBG$，又 $\overline{CG} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta BGC \cong \Delta OBA \text{(AAS 全等)。}$$

3. 討論正方形 $ABDE, ACHI, BCFG$ 中的等腰直角三角形關係：

因為四邊形 $ACHI, BCFG$ 為正方形，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，所以

$$\begin{aligned} \text{正方形}ACHI\text{面積} &= 2 \times \Delta ACI\text{面積} \\ &= 2 \times \Delta BGC\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} \end{aligned}$$

因為 $\Delta BGC \cong \Delta OBA$ ，且四邊形 $ABDE$ 為正方形，所以

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABDE\text{面積} &= 4 \times \Delta ABO\text{面積} \\ &= 4 \times \Delta BGC\text{面積} \\ &= 4 \times \Delta ACI\text{面積} \\ &= 2 \times \Delta BGC\text{面積} + 2 \times \Delta ACI\text{面積} \end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積} = \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**【註與心得】**

1.來源：這個證明出自於以下書籍

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 9). Amsterdam: A. Versluys.

2.心得：此題與 G005、G006 都是以等腰直角三角形為主架構，先以三邊為邊長向外作正方形，再透過頂點連線的分割，將三個正方形分割成若干塊全等三角形，然

而此題分割方式又較 G006 更為簡單，至於證明過程也較容易理解，只需證明三角形間的全等關係，再透過面積的關係，即可推導出勾股定理。

3.評量

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | | |

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：