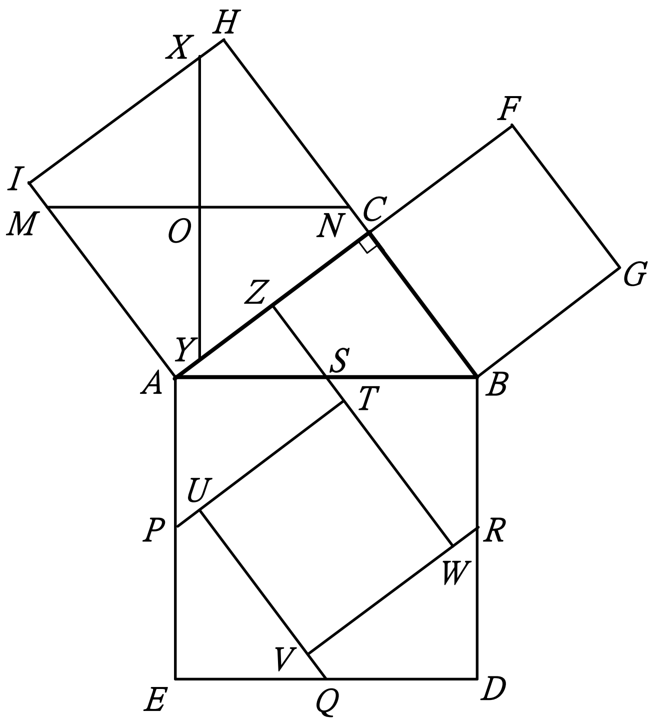
勾股定理證明-G009

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE, ACHI, BCFG$。

2. 取正方形$ABDE$四邊之中點P,Q,R,S，並作$\overline{PT}//\overline{RV}//\overline{AC},\overline{SW}//\overline{QU}//\overline{BC}$。

3. 取正方形$ACHI$之中心O，並作$\overline{XY}//\overline{AE},\overline{MN}//\overline{AB}$。



【求證過程】

先證明正方形$ABDE, ACHI$中的四片四邊形彼此全等，再討論正方形$ACHI$中的四片四邊形與正方形$BCFG$，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$UTWV$為矩形，進而推得$\angle AST=\angle BRW, \angle APT=\angle BSW$。

   因為$\overline{PT}//\overline{AC}//\overline{VR},\overline{WS}//\overline{BC}//\overline{QU}$且$\angle ACB=90^\circ$，所以

   四邊形$UTWV$為矩形。

   因為$\angle SBR+\angle SWR=180^\circ$，可得$\angle BSW+\angle BRW=180^\circ$，又$\angle BSW+\angle AST=180^\circ$，所以

   $$\angle AST=\angle BRW$$

   同理可得

$$\angle APT = \angle BSW$$

2. 證明四邊形 $SWRB, PTSA, QUPE, RVQD$ 全等。

   因為 S, P, Q, R 為正方形 $ABDE$ 四邊的中點，可得 $\overline{AP} = \overline{AS} = \overline{SB} = \overline{BR}$ ，又 $\angle PAS = 90° = \angle RBS$ ，所以

   $$\Delta APS \cong \Delta BSR \text{(SAS 全等)，可得到} \overline{PS} = \overline{RS}, \angle ASP = \angle BRS \text{ 。}$$

   因為 $\angle PST = \angle AST - \angle ASP = \angle BRW - \angle BRS = \angle SRW$ ，又 $\overline{PS} = \overline{RS}, \angle PTS = 90° = \angle SWR$ ，所以

   $$\Delta PTS \cong \Delta SWR \text{(AAS 全等)}$$

   因為 $\Delta APS \cong \Delta BRS, \Delta PTS \cong \Delta SWR$ ，所以

   四邊形 $SWRB$ 與四邊形 $PTSA$ 全等。

   同理可推得

   四邊形 $SWRB, PTSA, QUPE, RVQD$ 全等。

3. 證明四邊形 $UTWV$ 為正方形

   因為 $\overline{ST} = \overline{WR} = \overline{VQ} = \overline{UP}, \overline{SW} = \overline{RV} = \overline{QU} = \overline{PT}$ ，可得 $\overline{UT} = \overline{TW} = \overline{WV} = \overline{VU}$ ，又 $UTWV$ 為矩形，所以

   四邊形 $UTWV$ 為正方形。

4. 證明 O, S, T 共線。

   因為 S 為 $\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{TS} // \overline{BC}$ ，推得 $\overrightarrow{TS}$ 垂直平分 $\overline{AC}$ 於 Z ，又 O 為正方形 $ACHI$ 的中心，可得到 $\overline{OZ}$ 垂直 $\overline{AC}$ ，所以

   O, S, T 共線。

5. 證明四邊形 $OYCN, OMAY, OXIM, OCHX$ 全等。

   因為 $\overline{MN} // \overline{AB}, \overline{XY} // \overline{AE}, \angle BAE = 90°$ ，可得 $\angle NOY = 90° = \angle MOY$ ，又因為 $\overline{AM} // \overline{SO} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{AS} = \overline{BS}$ ，可得四邊形 $ABNM$ 為平行四邊形，所以 $\overline{ON} = \overline{MO}$ ，又 $\overline{OY} = \overline{OY}$ ，故

   $$\Delta YOM \cong \Delta YON \text{ (SAS 全等)，可得} \overline{YM} = \overline{YN} \text{ 。}$$

   因為 $\angle NOY + \angle NCY = 180°$ ，可推得 $\angle ONC + \angle OYC = 180° = \angle OYA + \angle OYC$ ，得到 $\angle ONC = \angle OYA$ ，又 $\angle ONY = \angle OYM$ ，可推得 $\angle CNY = \angle ONC - \angle ONY = \angle OYA - \angle OYM = \angle AYM$ ，又因為 $\angle YAM = 90° = \angle NCY, \overline{YN} = \overline{YM}$ ，所以

$$\Delta YMA \cong \Delta NYC \text{ (AAS 全等)}$$

因為$\Delta YOM \cong \Delta YON, \Delta YMA \cong \Delta NYC$，所以

四邊形$OYCN$與四邊形$OMAY$全等。

同理可推得

四邊形$OYCN, OMAY, OXIM, OCHX$全等。

6. 證明四邊形$OYCN$與四邊形$APTS$全等。

因為$\overline{OC} = \overline{OY} = \overline{AS} = \overline{AP}, \angle COY = 90° = \angle SAP$，所以

$\Delta YON \cong \Delta PAS$ (SAS 全等)，可推得$\overline{YN} = \overline{PS}$。

因為$\overline{OS} // \overline{CB}, \overline{MN} // \overline{AB}$，可得到$\angle ONC = \angle MOS = \angle AST$ (同位角)，所以

$\angle YNC = \angle ONC - \angle ONY = \angle AST - \angle ASP = \angle PST$，又因為

$\overline{YN} = \overline{PS}, \angle YCN = 90° = \angle PTS$，所以

$$\Delta YCN \cong \Delta PTS \text{ (AAS 全等)}$$

因為$\Delta YOM \cong \Delta PAS, \Delta YCN \cong \Delta PTS$，所以

四邊形$OYCN$與四邊形$APTS$全等。

7. 證明正方形$UTWV$與正方形$BCFG$全等

因為$\Delta YCN \cong \Delta PTS$，得到$\overline{NC} = \overline{ST}$，又因為$\overline{NC} + \overline{CB} = \overline{BN} = \overline{AM} = \overline{YC} = \overline{PT} = \overline{SW} =$

$\overline{ST} + \overline{TW}$，可推得$\overline{CB} = \overline{TW}$，又因為四邊形$UTWV$與四邊形$BCFG$均為正方形，

所以

正方形$UTWV$與正方形$BCFG$全等

8. 討論正方形$ACHI$中的四片全等四邊形，以及正方形$BCFG$與正方形$ABDE$的關係：

因為四邊形$SWRB, PTSA, QUPE, RVQD$全等，且四邊形$OYCN, OMAY, OXIM, OCHX$全等，又四邊形$OYCN$與四邊形$APTS$全等，以及正方形$UTWV$與正方形$BCFG$全等，所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= 4 \times \text{四邊形}APTS\text{面積} + \text{正方形}UTWV\text{面積} \\
&= 4 \times \text{四邊形}OYCN\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACHI\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積}
\end{aligned}$$

9. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積} = \text{正方形}ACHI\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 37). Amsterdam: A. Versluys.

2.心得:此題作圖透過建立與直角三角形三邊平行的平行線,將正方形分割出若干區塊，再一一證明這些區塊全等，最後再藉由面積拼合的概念，推導出勾股定理。此題證明因為牽涉到四邊形的全等證明，需要再分割成兩個三角形，所以整個證明過程冗長且複雜，對於國中生而言可說是相當有難度的一個證明方式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：