勾股定理證明-G010

【作輔助圖】

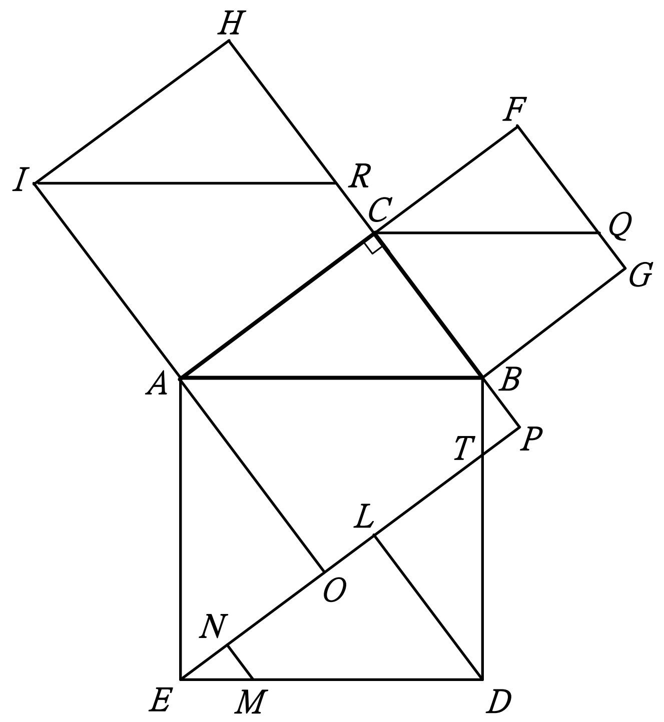
1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE, ACHI, BCFG$。

2. 過E作$\overrightarrow{EL}//\overline{AC}$，並且過$D$點作$\overline{DL}\perp\overrightarrow{EL}$。

3. 延長$\overrightarrow{IA}$交$\overrightarrow{EL}$於O點，並且在$\overrightarrow{EL}$上取$\overline{LP}=\overline{LN}=\overline{BC}$。

4. 作$\overline{NM}\perp\overrightarrow{EL}$，並且連接$\overline{BP}$。

5. 過I, C，作$\overline{IR}//\overline{AB},\overline{CQ}//\overline{AB}$。



【求證過程】

先證明$\Delta IHR,\Delta ACB,\Delta AOE$為全等，且$\Delta LDT,\Delta FCQ$亦全等，以及四邊形$NMDL$與四邊形$GQCB$全等，再利用面積關係推出四邊形$ACRI$與四邊形$AOPB$全等，最後討論正方形$ACHI$與正方形$BCFG$中的區塊，可拼合出正方形$ABDE$的區域，並利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta IHR \cong \Delta ACB \cong \Delta AOE$。

因為$\overline{IR}//\overline{AB}, \overline{IA}//\overline{RB}$，得到四邊形$IABR$為平行四邊形，所以$\overline{IR}=\overline{AB}=\overline{AE}$，且

$\angle IRH=\angle ABC=90°-\angle BAC=\angle BAO=90°-\angle EAO=\angle AEO$，又因為$\angle IHR=\angle ACB$
$=\angle AOE=90°$，所以

$$\Delta IHR \cong \Delta ACB \cong \Delta AOE \text{ (AAS 全等)}。$$

2. 證明C, B, P共線。

因為$\Delta EDL \cong \Delta ABC$，且$\overline{AB}//\overline{DE}$，可推得$\overline{AC}//\overline{EP}$，又因為$\overline{BC}\perp\overline{AC}, \overline{BP}\perp\overline{EP}$，

所以

$$C, B, P \text{ 共線。}$$

3. 證明四邊形$AOPC$為正方形，進而推得正方形$AOPC$與正方形$ACHI$全等。

因為$\overline{AC}//\overline{EP}, \angle ACB=\angle CAO=90°$，可得四邊形$AOPC$為矩形，又因為

$\Delta IHR \cong \Delta ACB \cong \Delta AOE$，可得到$\overline{IH}=\overline{AC}=\overline{AO}$，所以

$$\text{四邊形 } AOPC \text{ 為正方形。}$$

因為四邊形$ACHI$亦為正方形，所以

$$\text{正方形 } AOPC \text{ 與正方形 } ACHI \text{ 全等。}$$

4. 證明$\Delta ACB \cong \Delta ELD$，進而推得$\overline{EL}=\overline{AC}$。

因為$\overline{AB}//\overline{ED}$且$\overline{AC}//\overline{EL}$，可得$\angle CAB=\angle LED$，又因為$\angle ACB=\angle ELD=90°$，且

$\overline{AB}=\overline{ED}$，

故

$$\Delta ACB \cong \Delta ELD \text{ (AAS 全等)，得到 } \overline{EL}=\overline{AC}.$$

5. 證明$\Delta ENM \cong \Delta BPT$，進而推得$\overline{EM}=\overline{BT}$。

因為$\overline{EL}=\overline{AC}=\overline{PC}, \overline{LN}=\overline{LP}=\overline{BC}$，所以$\overline{EN}=\overline{EL}-\overline{LN}=\overline{PC}-\overline{BC}=\overline{PB}$。又因為

$\angle ENM=90°=\angle BPT$，且$\angle BTP=\angle ETD=90°-\angle NEM=\angle NME$，
所以

$$\Delta ENM \cong \Delta BPT \text{ (AAS 全等)，得到 } \overline{EM}=\overline{BT}.$$

6. 證明$\Delta LDT \cong \Delta FCQ$。

因為$\overline{CQ}//\overline{AB}$，可推得$\angle FCQ=\angle CAB=\angle LED=90°-\angle LDE=\angle LDT$，又因為

$\overline{CF}=\overline{CB}=\overline{LD}$，且$\angle CFQ=90°=\angle DLT$，所以

$$\Delta LDT\cong\Delta FCQ\text{ (ASA 全等)，得到}\overline{CQ}=\overline{DT}\text{ 。}$$

7. 證明四邊形 $NMDL$ 與四邊形 $GQCB$ 全等。

因為$\overline{CQ}=\overline{DT}=\overline{DB}-\overline{TB}=\overline{DE}-\overline{ME}=\overline{DM}$，又$\overline{BC}=\overline{DL}$，且$\angle BCQ=\angle CBA=\angle LDM$，所以

$$\Delta BCQ\cong\Delta LDM\text{ (SAS 全等)，得到}\overline{BQ}=\overline{LM}\text{ 。}$$

因為$\overline{BQ}=\overline{LM},\angle MNL=90°=\angle QGB,\overline{LN}=\overline{BC}=\overline{BG}$，所以

$$\Delta BGQ\cong\Delta LNM\text{ (RHS 全等)}$$

因為$\Delta BCQ\cong\Delta LDM,\Delta BGQ\cong\Delta LNM$，所以

四邊形 $NMDL$ 與四邊形 $GQCB$ 全等。

8. 討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 中的區域，與正方形 $ABDE$ 的關係：

因為正方形 $ACHI$ 與正方形 $AOPC$ 全等，且$\Delta IHR\cong\Delta ACB,\Delta ENM\cong\Delta BPT$，所以

$$\begin{aligned}\text{四邊形}ACRI\text{面積}&=\text{正方形}ACHI\text{面積}-\Delta IHR\text{面積}\\&=\text{正方形}AOPC\text{面積}-\Delta ABC\text{面積}\\&=\text{四邊形}AOPB\text{面積}\\&=\text{四邊形}AOTB\text{面積}+\Delta BPT\text{面積}\\&=\text{四邊形}AOTB\text{面積}+\Delta ENM\text{面積}\end{aligned}$$

因為$\Delta IHR\cong\Delta ACB\cong\Delta AOE$，四邊形 $NMDL$ 與四邊形 $GQCB$ 全等，及$\Delta LDT\cong\Delta FCQ$，可推得

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積}&=\Delta LDT\text{面積}+\text{四邊形}NMDL\text{面積}+\Delta AEO\text{面積}\\&\quad+(\text{四邊形}AOTB\text{面積}+\Delta ENM\text{面積})\\&=\Delta FCQ\text{面積}+\text{四邊形}GQCB\text{面積}+\Delta IHR\text{面積}\\&\quad+\text{四邊形}ACRI\text{面積}\\&=\text{四邊形}BCFG\text{面積}+\text{四邊形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

9. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積}=\text{正方形}ACHI\text{面積}+\text{正方形}BCFG\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 18 日想到的。

2.心得：此題證明將正方形 *ACHI* 與正方形 *BCFG* 切割成若干圖形，接著再利用全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形恰好可以拼合出正方形 *ABDE* ，整體過程較為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係，進而推導出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：