勾股定理證明-G011

【作輔助圖】

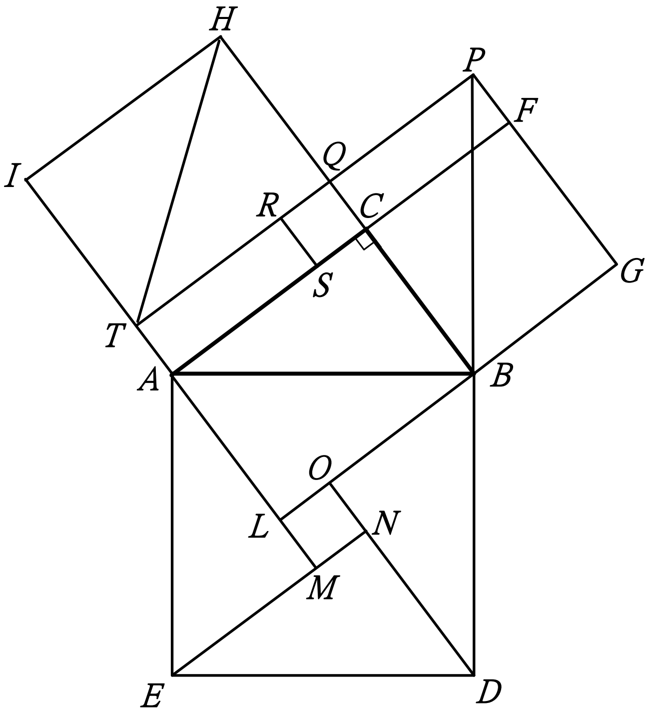
1. 以$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE, ACHI, BCFG$。

2. 延長$\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{IA}$且交於$L$，並過$E, D$作$\overline{AC}, \overline{BC}$的平行線，且交於$N$，則形成四邊形$OLMN$。

3. 延長$\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{DB}$且交於$P$，並過$P$作$\overline{PT} // \overline{AF}$。

4. 取$\overline{TR} = \overline{QP}$，並作$\overline{RS} \perp \overline{AC}$。

5. 連接$\overline{TH}$。



【求證過程】

先證明四邊形$OLMN$為正方形，且正方形$ABDE$中的四個直角三角形與矩形$BQPG$和矩形$TIHQ$的對角線所分割出來的直角三角形全等。再說明正方形$OLMN$與正方形$RSCQ$全等，最後討論正方形$ACHI$中的四個圖形與矩形$BQPG$中的兩個直角三角形，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明四邊形$OLMN$為矩形。

因為 $\overline{EN}//\overline{AC},\overline{DN}//\overline{BC}$ 且 $\overline{AM}\perp\overline{AC},\overline{BL}\perp\overline{BC}$，所以

$OLMN$ 為矩形。

2. 證明 $\Delta NED\cong\Delta ODB\cong\Delta LBA\cong\Delta MAE$，進而推得 $OLMN$ 為正方形。

因為 $\angle END=90°=\angle DOB$，可推得 $\angle NDE=90°-\angle ODB=\angle OBD$，又 $\overline{ED}=\overline{BD}$，所以

$\Delta NED\cong\Delta ODB$(AAS 全等)。

同理可推得

$\Delta NED\cong\Delta ODB\cong\Delta LBA\cong\Delta MAE$(AAS 全等)。

因為 $\overline{EN}=\overline{DO},\overline{EM}=\overline{DN}$，可推得 $\overline{MN}=\overline{EN}-\overline{EM}=\overline{DO}-\overline{DN}=\overline{NO}$，又因為 $OLMN$ 為矩形，所以

$OLMN$ 為正方形。

3. 證明 $\Delta LBA\cong\Delta GPB$。

因為四邊形 $ALBC$ 為矩形且四邊形 $BCFG$ 為正方形，可得 $\overline{AL}=\overline{CB}=\overline{BG}$ 且 $\angle ALB=\angle BGP$，又因為 $\angle ABL+\angle PBG=90°=\angle BPG+\angle PBG$，得到 $\angle ABL=\angle BPG$，所以

$\Delta LBA\cong\Delta GPB$(AAS 全等)，得到 $\overline{LB}=\overline{GP}$。

4. 證明四邊形 $TLBQ$ 為正方形，進而推得矩形 $ITQH$ 與矩形 $ALBC$ 全等。

因為 $\overline{PT}//\overline{AF}//\overline{LG},\angle ACB=90°=\angle CAL$，可得到 $\angle QTL=\angle TLB=\angle LBQ=\angle BQT=90°$，又 $\overline{LB}=\overline{GP}=\overline{BQ}$，所以

四邊形 $TLBQ$ 為正方形。

因為四邊形 $TLBQ$ 與四邊形 $ACHI$ 均為正方形，且 $\overline{TQ}=\overline{AC}$，可得正方形 $TLBQ$ 與正方形 $ACHI$ 全等，又因為正方形 $TLBQ$ 與正方形 $ACHI$ 重疊於矩形 $TACQ$，所以

矩形 $ITQH$ 與矩形 $ALBC$ 全等。

5. 證明四邊形 $RSCQ$ 與四邊形 $OLMN$ 為全等的正方形。

因為 $\overline{RS}\perp\overline{AC},\overline{PT}//\overline{AF},\angle ACB=90°$，可推得四邊形 $RSCQ$ 為矩形，又因為 $\overline{TQ}=\overline{LB}=\overline{PG}=\overline{QB},\overline{TR}=\overline{QP}=\overline{BG}=\overline{BC}=\overline{AL}=\overline{BO}$，可得到 $\overline{RQ}=\overline{TQ}-\overline{TR}=\overline{BQ}-\overline{BC}=\overline{CQ}$，且 $\overline{RQ}=\overline{TQ}-\overline{TR}=\overline{BL}-\overline{BO}=\overline{OL}$，所以

四邊形 $RSCQ$ 與四邊形 $OLMN$ 均為正方形且全等。

6. 討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 中的區域，與正方形 $ABDE$ 的關係：
因為四邊形 $BGPQ$ 與四邊形 $ITQH$ 為矩形，且矩形 $ITQH$ 與矩形 $ALBC$ 全等，得到 $\Delta BGP\text{面積}=\Delta PQB\text{面積}=\Delta HQT\text{面積}=\Delta TIH\text{面積}=\Delta LBA\text{面積}$，又因為 $\Delta NED\cong\Delta ODB\cong\Delta LBA\cong\Delta MAE, \Delta LBA\cong\Delta GPB$，且 $\text{正方形}RSCQ\cong\text{正方形}OLMN$，所以

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= 4\times\Delta LBA\text{面積}+\text{正方形}OLMN\text{面積}\\
&=(\Delta BGP\text{面積}+\Delta PQB\text{面積})+(\Delta HQT\text{面積}+\Delta TIH\text{面積})\\
&\quad+\text{正方形}RSCQ\text{面積}
\end{aligned}
$$

因為 $\Delta BGP\text{面積}+\Delta PQB\text{面積}=\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{矩形}CQPF\text{面積}$，又 $\text{矩形}CQPF$ 面積 $=\text{矩形}ATRS$ 面積，所以

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &=(\Delta BGP\text{面積}+\Delta PQB\text{面積})+(\Delta HQT\text{面積}+\Delta TIH\text{面積})\\
&\quad+\text{正方形}RSCQ\text{面積}\\
&=(\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{矩形}CQPF\text{面積})+\text{矩形}ITQH\text{面積}\\
&\quad+\text{正方形}RSCQ\text{面積}\\
&=(\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{矩形}ATRS\text{面積})+\text{矩形}ITQH\text{面積}\\
&\quad+\text{正方形}RSCQ\text{面積}\\
&=\text{正方形}BCFG\text{面積}+(\text{矩形}ATRS\text{面積}+\text{矩形}ITQH\text{面積}\\
&\quad+\text{正方形}RSCQ\text{面積})\\
&=\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}
\end{aligned}
$$

7. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積}=\text{正方形}ACHI\text{面積}+\text{正方形}BCFG\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他仔細分析過婆什伽羅(Bhaskara)對於勾股定理的證明後所想到的。

2.心得：此題證明透過平行線與垂直線將正方形 $ACHI$ 切割成若干圖形，再與正方形 $BCFG$ 拼合出矩形 $BQPG$ ，接著再利用全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形恰好可以拼合出正方形 $ABDE$ ，整體過程較為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係，進而推導出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：