勾股定理證明-G012

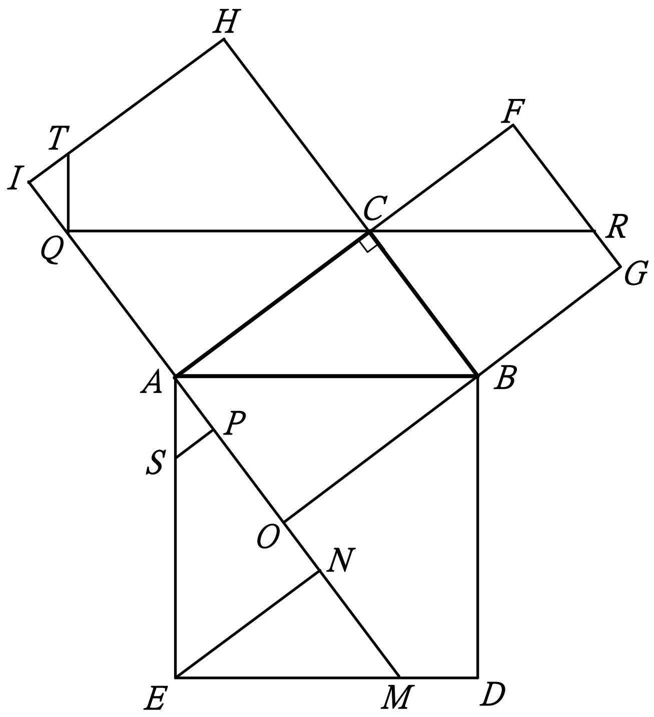
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE, ACHI, BCFG$。

2. 延長$\overrightarrow{IA}$且交$\overline{ED}$於M，並作$\overline{EN},\overline{BO}$垂直$\overline{AM}$。

3. 在$\overline{AM}$上取$\overline{NP}=\overline{BC}$，並作$\overline{PS}\,//\,\overline{NE}$。

4. 過C作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AI},\overline{GF}$於$Q,R$，並作$\overline{QT}\perp\overline{QR}$。



【求證過程】

證明正方形$ABDE$中所分割出來的每一片圖形，都與正方形$BCFG$和正方形$ACHI$中所分割出來的每一片圖形全等，也就是說正方形$ACHI$與矩形$BCFG$中的區塊，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta AEN\cong\Delta BAO$。

因為$\overline{EN}\perp\overline{AM},\overline{BO}\perp\overline{AM}$，得到$\angle ENA=90°=\angle AOB$，又因為$\angle ABO+\angle BAO=90°=$

$\angle BAO+\angle EAN$，可推得$\angle ABO=\angle EAN$，且$\overline{AB}=\overline{AE}$ 所以

$\Delta AEN\cong\Delta BAO$(AAS 全等)，可推得$\overline{EN}=\overline{AO}$。

2. 證明四邊形 $AOBC$ 為矩形，進而推得 O, B, G 共線。
   因為 $\angle ACB = 90° = \angle CAO = \angle AOB$，可推得 $\angle OBC = 90°$，又 $\angle CBG = 90°$，所以

   四邊形 $AOBC$ 為矩形，且 O, B, G 共線。

3. 證明 $\Delta ENM \cong \Delta CFR$。

   因為四邊形 $AOBC$ 為矩形且四邊形 $BCFG$ 為正方形，可得 $\overline{EN} = \overline{AO} = \overline{BC} = \overline{CF}$，且

   $\angle ENM = 90° = \angle CFR$，又因為 $\overline{CR} // \overline{AB} // \overline{ED}, \overline{CF} // \overline{EN}$，可推得 $\angle NEM = \angle CFR$，

   所以

   $\Delta ENM \cong \Delta CFR$ (ASA 全等)。

4. 證明四邊形 $ENPS$ 與四邊形 $CBGR$ 全等。

   因為 $\overline{EN} = \overline{CF} = \overline{BG}, \overline{NP} = \overline{BC} = \overline{BG}$，且 $\angle ENP = 90° = \angle CBG$，所以

   $\Delta EPN \cong \Delta CGB$ (SAS 全等)，

   可得到

   $$\overline{EP} = \overline{CG}, \angle EPN = \angle CGB = \angle PEN = \angle GCB = 45°$$ 。

   因為 $\overline{SP} \perp \overline{AN}$，且 $\angle EPN = \angle CGB$，及 $\angle EPS + \angle EPN = 90° = \angle CGR + \angle CGB$，得到

   $\angle EPS = \angle CGR$，又因為 $\angle SEP + \angle PEN + \angle NEM = 90° = \angle RCG + \angle GCB + \angle FCR$，且

   $\angle NEM = \angle FCR, \angle PEN = \angle GCB = 45°$，可得到 $\angle SEN = \angle RCB$，再加上 $\overline{EP} = \overline{CG}$，

   所以

   $\Delta ESP \cong \Delta CRG$ (ASA 全等)。

   因為 $\Delta EPN \cong \Delta CGB$ 且 $\Delta ESP \cong \Delta CRG$，所以

   四邊形 $ENPS$ 與四邊形 $CBGR$ 全等。

5. 證明 $\Delta AQC \cong \Delta OAB$。

   因為四邊形 $AOBC$ 為矩形，得到 $\overline{OB} = \overline{AC}, \angle QAC = 90° = \angle AOB$，又因為

   $\overline{QC} // \overline{AB}, \overline{AC} // \overline{OB}$，可推得 $\angle QCA = \angle CAB = \angle ABO$ (內錯角相等)，所以

   $\Delta AQC \cong \Delta OAB$ (ASA 全等)。

6. 證明四邊形 $BOMD$ 與四邊形 $CHTQ$ 全等。

   因為 $\overline{QC} // \overline{AB}, \overline{AQ} // \overline{BC}$，得到四邊形 $ABCQ$ 為平行四邊形，所以 $\overline{CQ} = \overline{AB} = \overline{BD}$。又

   因為 $\overline{CH} = \overline{CA} = \overline{BO}$，且 $\angle HCQ = \angle CBA = 90° - \angle ABO = \angle OBD$，所以

   $\Delta CHQ \cong \Delta BOD$ (SAS 全等)，

得到

$$\overline{HQ}=\overline{OD},\angle CHQ=\angle BOD,\angle HQC=\angle ODB \text{。}$$

因為 $\overline{TQ}\perp\overline{QC}$，可推得 $\angle TQH=90^\circ-\angle HQC=90^\circ-\angle ODB=\angle ODM$，又因為 $\angle THQ=90^\circ-\angle CHQ=90^\circ-\angle BOD=\angle DOM$，以及 $\overline{HQ}=\overline{OD}$，所以

$$\Delta TQH\cong\Delta MDO \text{ (SAS 全等)}$$

因為 $\Delta CHQ\cong\Delta BOD$ 且 $\Delta TQH\cong\Delta MDO$，所以

四邊形 $BOMD$ 與四邊形 $CHTQ$ 全等。

7. 證明 $\Delta ASP\cong\Delta QTI$

   因為 $\Delta ENM\cong\Delta CFR,\Delta ESP\cong\Delta CRG$，可得到 $\overline{EM}=\overline{CR}=\overline{SE}$，所以 $\overline{TQ}=\overline{MD}=\overline{ED}-\overline{EM}=\overline{AE}-\overline{SE}=\overline{AS}$。又因為 $\angle IQT+\angle CQA=90^\circ=\angle SAP+\angle BAO$，且 $\angle CQA=\angle BAO$ (同位角相等)，可得到 $\angle IQT=\angle SAP$，以及 $\angle TIQ=90^\circ=\angle SPA$，所以

$$\Delta ASP\cong\Delta QTI \text{ (AAS 全等)}$$

8. 討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 中的區域，與正方形 $ABDE$ 的關係：

   因為 $\Delta ENM\cong\Delta CFR$，四邊形 $ENPS$ 與四邊形 $CBGR$ 全等，$\Delta OAB\cong\Delta AQC$，四邊形 $BOMD$ 與四邊形 $CHTQ$ 全等，以及 $\Delta ASP\cong\Delta QTI$，所以

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積}&=(\Delta ENM\text{面積}+\text{四邊形}ENPS\text{面積})+(\Delta OAB\text{面積}\\&\quad+\text{四邊形}BOMD\text{面積}+\Delta ASP\text{面積})\\&=(\Delta CFR\text{面積}+\text{四邊形}CBGR\text{面積})+(\Delta AQC\text{面積}\\&\quad+\text{四邊形}CHTQ\text{面積}+\Delta QTI\text{面積})\\&=\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

9. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積}=\text{正方形}ACHI\text{面積}+\text{正方形}BCFG\text{面積}$$

   因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 28 日想到的。

2.心得：此題作圖相較於 G010 更為簡單，而證明過程仍依舊將正方形 *ACHI* 與正方形 *BCFG* 切割成若干圖形，接著再利用全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形恰好可以拼合出正方形 *ABDE* ，整體推導過程仍為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係，進而推導出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：