勾股定理證明-G013

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

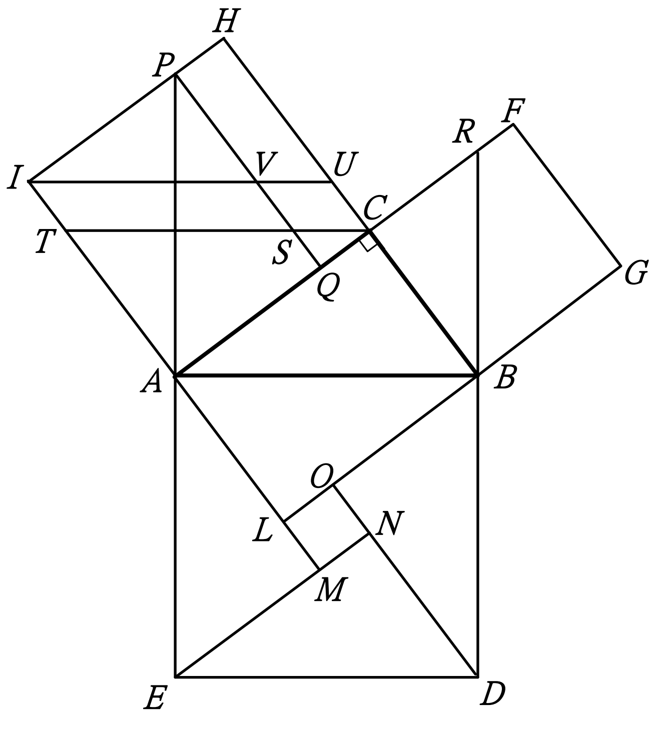
2. 延長$\overrightarrow{IA}$，並取$\overline{AM}=\overline{AI}$，且延長$\overrightarrow{GB}$交$\overline{AM}$於$L$。

3. 過D,E分別作$\overline{BC},\overline{AC}$的平行線$\overline{DO},\overline{EN}$。

4. 延長$\overrightarrow{EA}$且交$\overline{IH}$於P，並作$\overline{PQ}$平行於$\overline{HC}$。

5. 延長$\overrightarrow{DB}$且交$\overline{CF}$於R。

6. 過I,C作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CH},\overline{AI}$於$U,T$。



【求證過程】

先證明正方形$ABDE$中所分割出來的四片直角三角形面積，都與$\Delta API,\Delta PAQ,\Delta IUH,\Delta CTA$的面積相等，且平行四邊形$VSCU$的面積亦等於正方形$LMNO$。再利用面積關係討論出正方形$ACHI$中的區域與正方形$BCFG$中的兩個圖形，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta AEM \cong \Delta API$。

因為$\overline{EN} // \overline{AC} // \overline{IH}$，可推得$\angle AEM = \angle PAQ = \angle API$(同位角、內錯角)，又因為

$\angle EAM = \angle PAI$，且$\overline{IA} = \overline{AM}$，所以

$$\Delta AEM \cong \Delta API \ \ \text{(AAS 全等)},\text{得到}\ \overline{EM} = \overline{IP}, \angle EMA = \angle PIA = 90^\circ\text{。}$$

2. 證明四邊形$LMNO$為矩形，進而推得E, M, N共線。

因為G, B, L共線，且$\overline{AL} // \overline{DO} // \overline{BC}, \angle CBG = 90^\circ$，可推得$\angle OLM = 90^\circ = \angle LON$，又

因為$\overline{EN} // \overline{AC} // \overline{BL}$，得到$\angle ONM = 90^\circ$，所以

$$\text{四邊形}\ LMNO\ \text{為矩形。}$$

進一步，因為$\angle EMA = 90^\circ = \angle LMN$，所以

$$E, M, N\ \text{共線。}$$

3. 證明$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，進一步推得四邊形$LMNO$為正方形。

因為$\angle AME = 90^\circ = \angle END, \overline{AE} = \overline{ED}$，又因為$\angle AEM = 90^\circ - \angle DEN = \angle EDN$，所以

$$\Delta AEM \cong \Delta EDN \ \ \text{(AAS 全等)。}$$

同理可推得

$$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL\text{。}$$

因為$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，得到$\overline{EM} = \overline{AL}, \overline{EN} = \overline{AM}$，進一步推得$\overline{MN} =$

$\overline{EN} - \overline{EM} = \overline{AM} - \overline{AL} = \overline{LM}$，又四邊形$LMNO$為矩形，所以

$$\text{四邊形}\ LMNO\ \text{為正方形。}$$

4. 證明$\Delta BRC \cong \Delta IVP$。

因為$\overline{PQ} // \overline{HC}$，可推得$\angle IPV = 90^\circ = \angle BCR$，又因為$\overline{IP} = \overline{EM} = \overline{AL} = \overline{BC}$，且

$\angle PIV = 90^\circ - \angle HUI = 90^\circ - \angle ABC = \angle CBR$，所以

$$\Delta BRC \cong \Delta IVP\ \text{(ASA 全等)，可得到}\ \overline{BR} = \overline{IV}\text{。}$$

5. 證明四邊形$BGFR$與四邊形$TAQS$全等。

因為$\overline{IU} // \overline{TC} // \overline{AB}, \overline{IA} // \overline{UB}$，得到四邊形$ABUI$為平行四邊形，可推得$\overline{TS} = \overline{IV} = \overline{BR}$

且$\overline{TA} = \overline{CB} = \overline{BG}$，以及$\angle ATS = \angle ABC = 90^\circ - \angle CBR = \angle GBR$，所以

$$\Delta BGR \cong \Delta TAS \ \ \text{(SAS 全等)，可得到}\ \overline{GR} = \overline{AS}\text{。}$$

因為 $\overline{AQ}=\overline{IP}=\overline{EM}=\overline{AL}=\overline{FG}, \overline{AS}=\overline{GR}$ ，且 $\angle AQS=90°=\angle GFR$ ，所以

$\Delta GFR \cong \Delta AQS$ (RHS 全等)。

因為 $\Delta BGR \cong \Delta TAS$ 且 $\Delta GFR \cong \Delta AQS$ ，所以

四邊形 $BGFR$ 與四邊形 $TAQS$ 全等。

6. 討論正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 中的區域，與正方形 $ABDE$ 的關係：

因為四邊形 $VSCU$ 為平行四邊形，且四邊形 $LMNO$ 為正方形，可推得 $\overline{VS}=\overline{IT}=\overline{IA}-\overline{AT}=\overline{AM}-\overline{AL}=\overline{LM}$ ，又因為 $\overline{CQ}\perp\overrightarrow{VS}$ ，所以

$$\begin{aligned}\text{四邊形}VSCU\text{面積}&=\overline{VS}\times\overline{CQ}=\overline{LM}\times(\overline{AC}-\overline{AQ})\\&=\overline{LM}\times(\overline{LB}-\overline{OB})=\overline{LM}\times\overline{OL}\\&=\text{正方形}LMNO\text{面積}\end{aligned}$$

因為四邊形 $ITCU$ 為平行四邊形，且 $\overline{HC}=\overline{IA}$ ，得到 $\overline{HU}=\overline{TA}$ ，所以

$$\Delta IUH\text{面積}=\overline{IH}\times\overline{HU}\times\frac{1}{2}=\overline{AC}\times\overline{TA}\times\frac{1}{2}=\Delta CTA\text{面積}$$

因為四邊形 $ABCT$ 為平行四邊形且四邊形 $ALBC$ 為矩形，所以

$$\Delta IUH\text{面積}=\Delta CTA\text{面積}=\Delta ABC\text{面積}=\Delta BAL\text{面積}\text{。}$$

因為四邊形 $AQPI$ 為矩形，且 $\Delta API\cong\Delta AEM\cong\Delta EDN\cong\Delta DBO\cong\Delta BAL$ ，所以

$$\begin{aligned}&\Delta AQP\text{面積}=\Delta API\text{面積}=\Delta AEM\text{面積}\\&=\Delta EDN\text{面積}=\Delta DBO\text{面積}=\Delta BAL\text{面積}\end{aligned}$$

綜合上述面積關係，可推得

$$\begin{aligned}\text{正方形}ACHI\text{面積}&=(\Delta IUH\text{面積}+\Delta CTA\text{面積})+(\Delta API\text{面積}+\\&\quad\Delta PAQ\text{面積})+\text{四邊形}VSCU\text{面積}-(\Delta IVP\\&\quad\text{面積}+\text{四邊形}AQST\text{面積})\\&=(\Delta IUH\text{面積}+\Delta CTA\text{面積})+(\Delta API\text{面積}+\\&\quad\Delta PAQ\text{面積})+\text{四邊形}VSCU\text{面積}-(\Delta BRC\\&\quad\text{面積}+\text{四邊形}BGFR\text{面積})\\&=(\Delta IUH\text{面積}+\Delta CTA\text{面積})+(\Delta API\text{面積}+\\&\quad\Delta PAQ\text{面積})+\text{四邊形}VSCU\text{面積}-(\text{正方形}\\&\quad BCFG\text{面積})\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}&\text{正方形}ACHI\text{面積}+\text{正方形}BCFG\text{面積}\\&=(\Delta IUH\text{面積}+\Delta CTA\text{面積})+(\Delta API\text{面積}+\Delta PAQ\text{面積})+\text{四邊形}\\&\quad VSCU\text{面積}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= (\Delta AEM\text{面積}+\Delta EDN\text{面積})+(\Delta DBO\text{面積} \\
&\quad +\Delta BAL\text{面積})+\text{四邊形}LMNO\text{面積} \\
&= (\Delta API\text{面積}+\Delta PAQ\text{面積})+(\Delta IUH\text{面積} \\
&\quad +\Delta CTA)+VSCU \\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}
\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積}=\text{正方形}ACHI\text{面積}+\text{正方形}BCFG\text{面積}$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 28 日下午 9 時 30 分想到的。

2.心得：此題作圖較為複雜，證明過程將正方形 *ACHI* 與正方形 *BCFG* 切割成若干圖形，接著再利用全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形的面積組合恰好等於正方形 *ABDE* ，整體推導過程仍為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係，與 G012 不同之處在於本題就切割成若干圖形面積相等的方式推導出勾股定理，而 G012 可就拼圖的方式來說明勾股定理。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充