勾股定理證明-G014

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

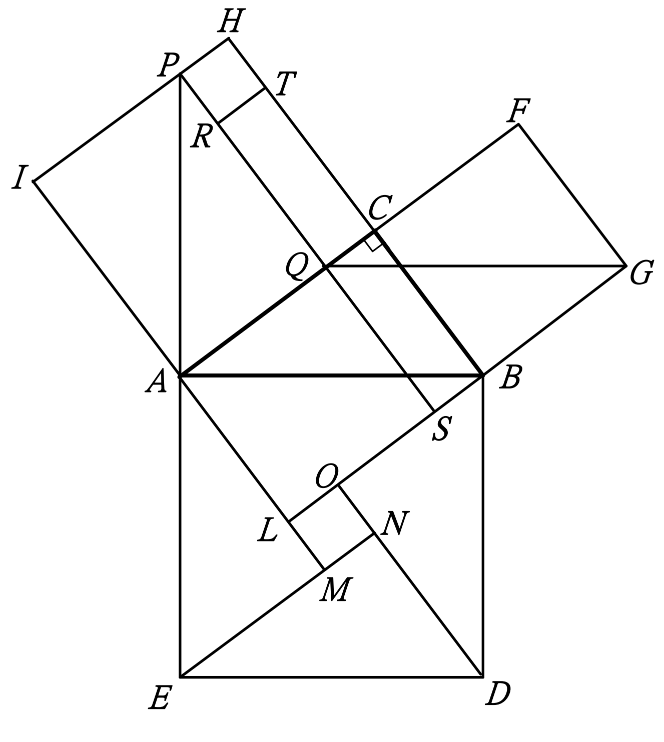
2. 延長$\overrightarrow{IA}$，並取$\overline{AM}=\overline{AI}$，且延長$\overrightarrow{GB}$交$\overline{AM}$於$L$。

3. 過D,E分別作$\overline{BC},\overline{AC}$的平行線$\overline{DO},\overline{EN}$。

4. 延長$\overrightarrow{EA}$且交$\overline{IH}$於P，並作$\overline{PS}$平行於$\overline{HB}$，且$\overline{PS}$交$\overline{CA},\overline{BL}$於$Q,S$。

5. 在$\overline{CH}$上取$\overline{CT}=\overline{CB}$，並作$\overline{TR}$平行於$\overline{AC}$。

6. 連接$\overline{QG}$。



【求證過程】

先證明正方形$ABDE$中所分割出來的四片直角三角形面積，都與$\Delta API,\Delta PAQ,\Delta GQS,\Delta QGF$的面積相等，且正方形$LMNO$的面積亦等於正方形$PRTH$。再利用面積關係討論出正方形$ACHI$中的區域與正方形$BCFG$中的兩個圖形，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta AEM \cong \Delta API$。

因為$\overline{EN}//\overline{AC}//\overline{IH}$，可推得$\angle AEM=\angle PAQ=\angle API$(同位角、內錯角)，又因為

$\angle EAM=\angle PAI$，且$\overline{IA}=\overline{AM}$，所以

$$\Delta AEM \cong \Delta API \quad \text{(AAS 全等)，得到} \overline{EM}=\overline{IP}, \angle EMA=\angle PIA=90^\circ \text{。}$$

2. 證明四邊形$LMNO$為矩形，進而推得E,M,N共線。

因為G,B,L共線，且$\overline{AL}//\overline{DO}//\overline{BC}, \angle CBG=90^\circ$，可推得$\angle OLM=90^\circ=\angle LON$，又

因為$\overline{EN}//\overline{AC}//\overline{BL}$，得到$\angle ONM=90^\circ$，所以

四邊形$LMNO$為矩形。

進一步，因為$\angle EMA=90^\circ=\angle LMN$，所以

E,M,N共線。

3. 證明$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，進一步推得四邊形$LMNO$為正方形。

因為$\angle AME=90^\circ=\angle END, \overline{AE}=\overline{ED}$，又因為$\angle AEM=90^\circ-\angle DEN=\angle EDN$，所以

$\Delta AEM \cong \Delta EDN$ (AAS 全等)。

同理可推得

$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$。

因為$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，得到$\overline{EM}=\overline{AL}, \overline{EN}=\overline{AM}$，進一步推得$\overline{MN}=$

$\overline{EN}-\overline{EM}=\overline{AM}-\overline{AL}=\overline{LM}$，又四邊形$LMNO$為矩形，所以

四邊形$LMNO$為正方形。

4. 證明四邊形$PRTH$為正方形，進一步推得正方形$PRTH$與正方形$LMNO$全等。

因為$\overline{RT}//\overline{AC}, \overline{PS}//\overline{HB}$，且$\angle PHT=90^\circ$，得到$\angle PHT=\angle HTR=\angle TRP=\angle RPH=90^\circ$，

所以

四邊形$PRTH$為矩形。

因為$\overline{PI}=\overline{EM}=\overline{AL}=\overline{CB}=\overline{TC}$且$ACHI$為正方形，可推得$\overline{HP}=\overline{HI}-\overline{PI}=\overline{HC}-\overline{TC}=$

$\overline{HT}$，所以

四邊形$PRTH$為正方形。

因為$ACHI$為正方形且$\Delta AEM \cong \Delta API$，可推得$\overline{HP}=\overline{HI}-\overline{PI}=\overline{AM}-\overline{AL}=\overline{LM}$，又因

為四邊形 $PRTH$ 與四邊形 $LMNO$ 均為正方形，所以

$$\text{正方形 } PRTH \text{ 與正方形 } LMNO \text{ 全等。}$$

5. 先證明四邊形 $ALSQ$ 為正方形，再證明 $\Delta BAL = \Delta GQS = \Delta AEM = \Delta QGF$ 。

   因為 $\Delta AEM \cong \Delta API \cong \Delta BAL$ ，得到 $\overline{QA} = \overline{PI} = \overline{EM} = \overline{AL}$ ，且四邊形 $ALSQ$ 為矩形，所以

   $$\text{四邊形 } ALSQ \text{ 為正方形。}$$

   因此可推得，長方形 $ALBC$ 面積等於長方形 $QSGF$ 面積，所以

   $$\Delta BAL\text{面積} = \Delta GQS\text{面積} = \Delta AEM\text{面積} = \Delta QGF\text{面積}\text{ 。}$$

6. 證明長方形 $QSBC$ 面積等於長方形 $QCTR$ 面積。

   因為 $\overline{BC} = \overline{CT}$ ，且 $\overline{QC} \perp \overline{TB}$ ，所以

   $$\text{長方形}QSBC\text{面積} = \overline{BC} \times \overline{CQ} = \overline{CT} \times \overline{CQ} = \text{長方形}QCTR\text{面積}\text{ 。}$$

7. 證明 長方形 $QSGF$ 面積等於 正方形 $BCFG$ 面積與長方形 $RQCT$ 面積 的和。

   $$\begin{aligned}\text{長方形}QSGF\text{面積} &= \Delta GQS\text{面積} + \Delta QGF\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{長方形}QSBC\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{長方形}RQCT\text{面積}\end{aligned}$$

8. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

   $$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積} &= 2\times\Delta BAL\text{面積} + 2\times\Delta EDN\text{面積} + \text{正方形}LMNO\text{面積} \\ &= 2\times\Delta GQS\text{面積} + 2\times\Delta API\text{面積} + \text{正方形}PRTH\text{面積} \\ &= (\text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{長方形}QSBC\text{面積}) + \text{長方形} \\ &\quad\ PIAQ\text{面積} + \text{正方形}PRTH\text{面積} \\ &= (\text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{長方形}RQCT\text{面積}) + \text{長方形} \\ &\quad\ PIAQ\text{面積} + \text{正方形}PRTH\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

   因此

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 28 日上午 10 時想到的。

2.心得：此題證明將正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 切割成若干圖形，接著再利用全等關係與面積相等的關係，透過將這些圖形的組合或疊合，可推出其面積恰好等於正方形 $ABDE$ ，整體推導過程仍為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係及面積關係。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充