勾股定理證明-G015

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

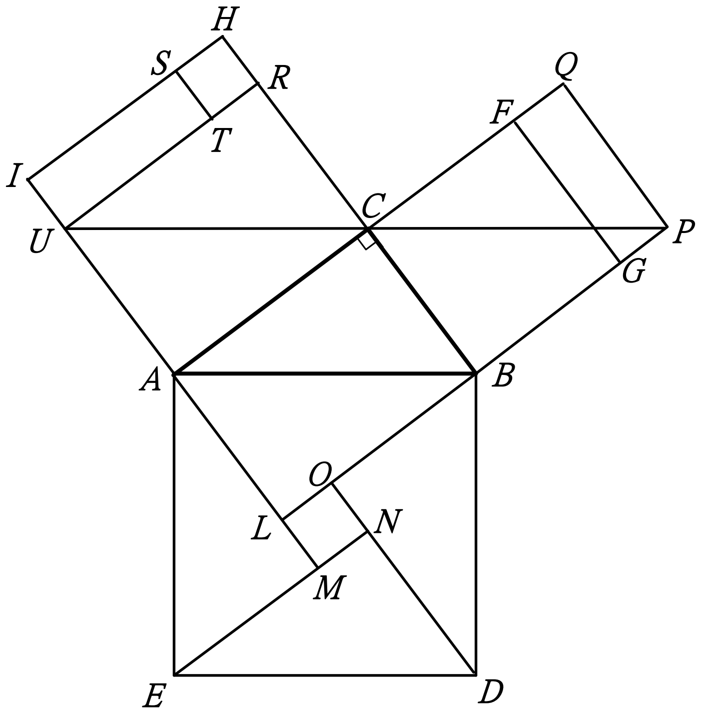
2. 延長$\overrightarrow{IA}$，並取$\overline{AM}=\overline{AI}$，且延長$\overrightarrow{GB}$交$\overline{AM}$於$L$。

3. 過D,E分別作$\overline{BC},\overline{AC}$的平行線$\overline{DO},\overline{EN}$。

4. 在$\overline{CH},\overline{IH}$上取$\overline{CR}=\overline{CF},\overline{HR}=\overline{HS}$，並作$\overline{RU}//\overline{AC},\overline{ST}//\overline{HC}$。

5. 延長$\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BG}$，並取$\overline{FQ}=\overline{GP}=\overline{HR}$。

6. 連接$\overline{QP},\overline{UP}$。



【求證過程】

先證明正方形$ABDE$中所分割出來的四片直角三角形面積，都與$\Delta CPQ,\Delta UCR,$的面積相等，且正方形$LMNO$的面積亦等於正方形$STRH$。再利用面 積關係討論出正方形$ACHI$中的區域與正方形$BCFG$中的兩個圖形，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利

用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明四邊形 $RHIU$ 為長方形，且四邊形 $RHST$ 為正方形。

   因為四邊形 $ACHI$ 為正方形，且 $\overline{RU}//\overline{AC}$，所以

   四邊形 $RHIU$ 為長方形。

   又因為 $\overline{HR}=\overline{HS}$，所以

   四邊形 $RHST$ 為正方形。

2. 證明四邊形 $BCQP$ 為長方形。

   因為四邊形 $BCFG$ 為正方形，且 $\overline{FQ}=\overline{GP}, \overline{FQ}//\overline{GP}$，所以

   四邊形 $BCQP$ 為長方形，得到 $\angle CQP=90°$。

3. 證明 $\Delta UCR \cong \Delta CPQ$。

   因為 $\overline{RU}//\overline{AC}$ 且 $\angle ACB=90°$，得到 $\angle URC=90°=\angle CQP$，又因為 $\overline{CR}=\overline{CF}$ 且四邊形 $BCFG$ 為正方形，得到 $\overline{CR}=\overline{CF}=\overline{CB}=\overline{QP}$，又 $\overline{CQ}=\overline{CF}+\overline{FQ}=\overline{CR}+\overline{HR}=\overline{CH}=\overline{HI}=\overline{RU}$，所以

   $\Delta UCR \cong \Delta CPQ$ (SAS 全等)。

4. 證明 U,C,P 共線。

   因為 $\Delta UCR \cong \Delta CPQ$，可推得 $\angle UCR+\angle RUC=90°=\angle UCR+\angle QCP$，又 $\angle ACB=90°=\angle RCQ$，得到 $\angle UCR+\angle QCP+\angle RCQ=180°$，所以

   U,C,P 共線。

5. 證明四邊形 $ABCU$ 為平行四邊形，得到 $\overline{UP}//\overline{AB}$。

   因為 $\angle ACB=90°=\angle CAU$，得到 $\overline{BC}//\overline{AU}$，且 $\overline{BC}=\overline{CF}=\overline{CR}=\overline{AU}$，所以

   四邊形 $ABCU$ 為平行四邊形。

   又因為 U,C,P 共線，所以進一步可得到

   $\overline{UP}//\overline{AB}$。

6. 證明 $\Delta CUA \cong \Delta AEM$，得到 $\angle CAU=90°=\angle AME$。

   因為四邊形 $ABCU$ 為平行四邊形，可得到 $\overline{CU}=\overline{AB}=\overline{AE}$，且 $\angle ACU=90°-\angle CUA=90°-\angle BAM=\angle MAE$，又因為 $\overline{AM}=\overline{AI}=\overline{AC}$，所以

   $\Delta CUA \cong \Delta AEM$ (SAS 全等)，得到 $\angle CAU=90°=\angle AME$。

7. 證明四邊形 $LMNO$ 為矩形，進而推得 E, M, N 共線。

因為 G, B, L 共線，且 $\overline{AL}//\overline{DO}//\overline{BC}, \angle CBG = 90°$，可推得 $\angle OLM = 90° = \angle LON$，又

因為 $\overline{EN}//\overline{AC}//\overline{BL}$，得到 $\angle ONM = 90°$，所以

四邊形 $LMNO$ 為矩形。

進一步，因為 $\angle EMA = 90° = \angle LMN$，所以

E, M, N 共線。

8. 證明 $\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，進一步推得四邊形 $LMNO$ 為正方形。

因為 $\angle AME = 90° = \angle END, \overline{AE} = \overline{ED}$，又因為 $\angle AEM = 90° - \angle DEN = \angle EDN$，所以

$\Delta AEM \cong \Delta EDN$ (AAS 全等)。

同理可推得

$\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$。

因為 $\Delta AEM \cong \Delta EDN \cong \Delta DBO \cong \Delta BAL$，得到 $\overline{EM} = \overline{AL}, \overline{EN} = \overline{AM}$，進一步推得 $\overline{MN} =$

$\overline{EN} - \overline{EM} = \overline{AM} - \overline{AL} = \overline{LM}$，又四邊形 $LMNO$ 為矩形，所以

四邊形 $LMNO$ 為正方形。

9. 證明長方形 $FGPQ$ 面積等於長方形 $SIUT$ 面積。

因為 $\overline{FQ} = \overline{HR} = \overline{ST}, \overline{FG} = \overline{CB} = \overline{CR} = \overline{CH} - \overline{HR} = \overline{HI} - \overline{HS} = \overline{SI}$，所以

$$\text{長方形}FGPQ\text{面積} = \overline{FQ} \times \overline{FG} = \overline{ST} \times \overline{SI} = \text{長方形}SIUT\text{面積}$$ 。

10. 證明長方形 $BCQP$ 面積與四邊形 $ACRU$ 面積等於 ΔBAL 的兩倍。

因為 $\Delta UCR \cong \Delta CPQ$，可得到 $\overline{CQ} = \overline{UR}, \overline{QP} = \overline{RC}$，所以

$$\text{長方形}BCQP\text{面積} = \overline{CQ} \times \overline{QP} = \overline{UR} \times \overline{RC} = \text{長方形}ACRU\text{面積}$$ 。

又因為 $\Delta UCR \cong \Delta CPQ \cong \Delta BAL$，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}BCQP\text{面積} &= 2 \times \Delta CPQ \\ &= \text{長方形}ACRU\text{面積} \\ &= 2 \times \Delta UCR \\ &= 2 \times \Delta BAL\end{aligned}$$

11. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= 4\times\Delta BAL\text{面積}+\text{正方形}LMNO\text{面積}\\
&= (\text{長方形}BCQP\text{面積}+\text{長方形}ACRU\text{面積})+\text{正方形}STRH\text{面積}\\
&= (\text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{長方形}FGQP\text{面積}+\text{長方形}ACRU\text{面積})\\
&\quad +\text{正方形}STRH\text{面積}\\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積}+(\text{長方形}SIUT\text{面積}+\text{長方形}ACRU\text{面積}+\\
&\quad \text{正方形}STRH\text{面積})\\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積}+\text{正方形}ACHI\text{面積}
\end{aligned}
$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍

J.D. Runkle (1859). *Mathematical Monthly*, v. 2, published in New York and London.

2.心得：此題證明將正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 切割成若干圖形，接著再利用圖形的組合，及全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形的面積組合恰好等於正方形 $ABDE$ ，整體推導過程仍為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係及面積關係，進而推導出勾股定理。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充：