勾股定理證明-G016

【作輔助圖】

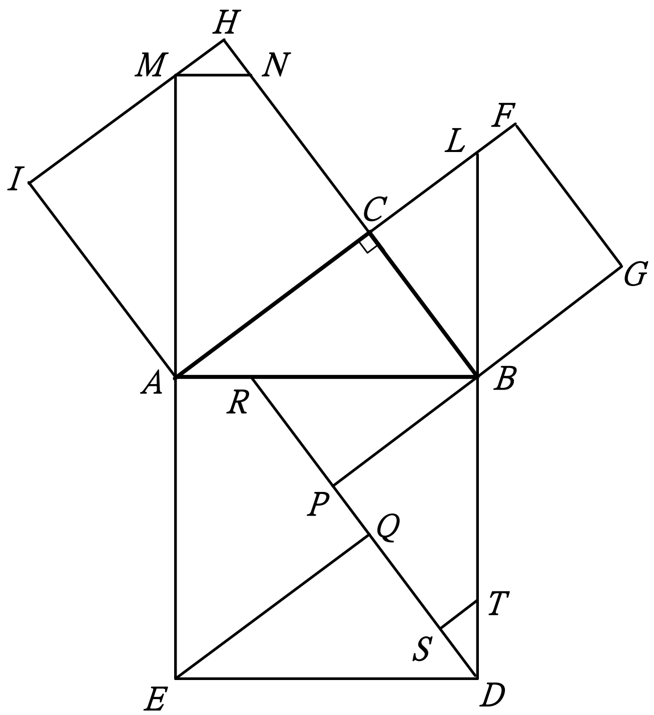
1. 以 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE,ACHI,BCFG$。

2. 過 D,E 分別作 $\overline{BC},\overline{AC}$ 的平行線 $\overline{DR},\overline{EQ}$。

3. 延長 $\overrightarrow{GB},\overrightarrow{DB}$，交 $\overline{DR},\overline{CF}$ 於 P,L。

4. 在 $\overline{DB}$ 上取 $\overline{BT}=\overline{BL}$，並過 T 作 $\overline{ST}//\overline{GP}$。

5. 延長 $\overrightarrow{EA}$，交 $\overline{HI}$ 於 M，並過 M 作 $\overline{MN}//\overline{AB}$。



【求證過程】

先證明 $\Delta EDQ,\Delta ABC,\Delta AMI,\Delta DBP$ 全等，再證明四邊形 $AEQR$ 與四邊形 $MACN$ 全等，且四邊形 $BPST$ 與四邊形 $BGFL$ 全等。再利用面積關係討論出正方形 $ACHI$ 中的區域與正方形 $BCFG$ 中的兩個圖形，可拼合出正方形 $ABDE$ 的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\Delta EDQ\cong\Delta ABC\cong\Delta AMI\cong\Delta DBP$。

因為 $\overline{EQ}//\overline{AC},\overline{DR}//\overline{BC}$，且 $\angle ACB=90°$，得到 $\angle EQD=90°=\angle ACB$，且可推得

$\angle CAB = 90° - \angle MAC = 90° - \angle AEQ = \angle QED$，又因為 $\overline{AB} = \overline{ED}$，所以

$$\Delta EDQ \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)。}$$

因為 $\overline{AI} = \overline{AC}, \angle AIM = 90° = \angle ACB$，又因為 $\angle IAM = 90° - \angle MAC = \angle CAB$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AMI \text{ (ASA 全等)。}$$

因為 $\overline{AB} = \overline{BD}, \angle ACB = \angle DPB = 90°$，且 $\angle ABC = 90° - \angle PBR = \angle DBP$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBP \text{ (AAS 全等)。}$$

因此可推得

$$\Delta EDQ \cong \Delta ABC \cong \Delta AMI \cong \Delta DBP，$$

得到 $\overline{AM} = \overline{ED} = \overline{AE}, \overline{EQ} = \overline{AC}, \overline{BC} = \overline{BP}$。

2. 證明四邊形 $AEQR$ 與四邊形 $MACN$ 全等。

因為 $\overline{EQ} // \overline{AC}$，得到 $\angle MAC = \angle AEQ$ (同位角)，又因為 $\overline{AM} = \overline{EA}, \overline{AC} = \overline{EQ}$，所以

$$\Delta MAC \cong \Delta AEQ \text{ (SAS 全等)，}$$

得到 $\overline{MC} = \overline{AQ}, \angle AMC = \angle EAQ, \angle MCA = \angle AQE$。

因為 $\overline{MN} // \overline{AB}, \angle MAB = 90°$，可得到 $\angle NMC = 90° - \angle AMC = 90° - \angle EAQ = \angle RAQ$，

又因為 $\angle ACN = 90° = \angle EQR$，可推得 $\angle NCM = 90° - \angle ACM = 90° - \angle AQE = \angle RQA$，

又 $\overline{MC} = \overline{AQ}$，所以

$$\Delta MNC \cong \Delta ARQ \text{ (ASA 全等)。}$$

因為 $\Delta MAC \cong \Delta AEQ, \Delta MNC \cong \Delta ARQ$，所以

四邊形 $AEQR$ 與四邊形 $MACN$ 全等，得到 $\overline{MN} = \overline{AR}$。

3. 證明 $\Delta BRP \cong \Delta BLC$。

因為 $\overline{BC} = \overline{BP}, \angle LCB = 90° = \angle RPB$，且 $\angle LBC = 90° - \angle ABC = \angle PBR$，所以

$\Delta BRP \cong \Delta BLC$ (ASA 全等)，得到 $\overline{BL} = \overline{BR}$。

4. 證明四邊形 $BPST$ 與四邊形 $BGFL$ 全等。

因為 $\overline{BP} = \overline{BC} = \overline{BG}, \overline{BL} = \overline{BT}$ 且 $\angle LBG = \angle TBP$，所以

$\Delta PBT \cong \Delta GBL$ (SAS 全等)，得到 $\overline{PT} = \overline{GL}, \angle BPT = \angle BGL$。

因為$\overline{TS}//\overline{BP}, \angle BPS = 90°$，得到$\angle TSP = 90° = \angle LFG$，又因為$\overline{PT} = \overline{GL}$，且$\angle TPS = 90° - \angle BPT = 90° - \angle BGL = \angle LGF$，所以

$$\Delta PTS \cong \Delta GLF \quad \text{(AAS 全等)。}$$

因為$\Delta PBT \cong \Delta GBL, \Delta PTS \cong \Delta GLF$，所以

四邊形$BPST$與四邊形$BGFL$全等。

5. 證明$\Delta DTS \cong \Delta MNH$。

因為$\overline{BL} = \overline{BR} = \overline{BT}, \overline{AR} = \overline{MN}, \overline{AB} = \overline{BD}$，可推得$\overline{MN} = \overline{AR} = \overline{AB} - \overline{BR} = \overline{BD} - \overline{BT} = \overline{TD}$，

又因為$\angle TDS = \angle MAI = 90° - \angle AMI = \angle NMH$，且$\angle MHN = 90° = \angle DST$，所以

$$\Delta DTS \cong \Delta MNH \quad \text{(AAS 全等)。}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABDE\text{面積} &= (\Delta DEQ\text{面積} + \text{四邊形}AEQR\text{面積} + \Delta DTS\text{面積}) + (\Delta BRP\text{面積} \\ &\quad + \text{四邊形}BPST\text{面積}) \\ &= (\Delta AMI\text{面積} + \text{四邊形}MACN\text{面積} + \Delta MNH\text{面積}) + (\Delta BLC\text{面積} \\ &\quad + \text{四邊形}BGFL\text{面積}) \\ &= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}\end{aligned}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(4), 169.

2.心得：此題將正方形分割出若干區塊，再一一證明這些區塊全等，最後再藉由面積拼合的概念，推導出勾股定理。此題證明因為牽涉到四邊形的全等證明，需要再分割成兩個三角形，所以整個證明過程冗長且複雜，對於國中生而言可說是相當有難度的一個證明方式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：