勾股定理證明-G017

【作輔助圖】

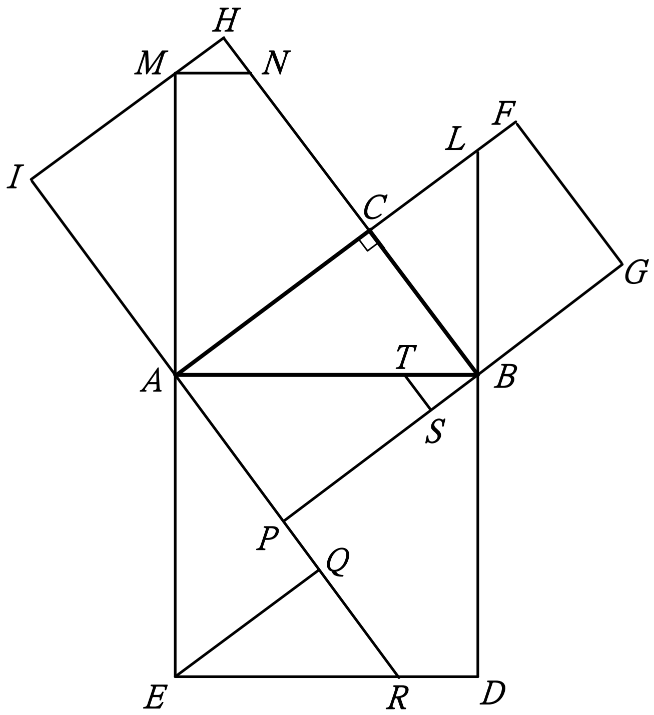
1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE,ACHI,BCFG$。

2. 過A,E分別作$\overline{BC},\overline{AC}$的平行線$\overline{AR},\overline{EQ}$。

3. 延長$\overrightarrow{GB},\overrightarrow{DB}$，交$\overline{AR},\overline{CF}$於$P,L$。

4. 在$\overline{BP}$上取$\overline{PS}=\overline{BG}$，並過$S$作$\overline{ST}//\overline{BC}$。

5. 延長$\overrightarrow{EA}$，交$\overline{HI}$於M，並過M作$\overline{MN}//\overline{AB}$。



【求證過程】

先證明$\Delta AEQ,\Delta ABC,\Delta AMI,\Delta BAP$全等，再證明四邊形$BDRP$與四邊形$AMNC$全等，且四邊形$APST$與四邊形$BGFL$全等。再利用面積關係討論出正方形$ACHI$中的區域與正方形$BCFG$中的兩個圖形，可拼合出正方形$ABDE$的區域，再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta AEQ\cong\Delta ABC\cong\Delta AMI\cong\Delta BAP$。

因為$\overline{EQ}//\overline{AC}$，且$\angle CAQ=90°$，得到$\angle EQA=90°$(內錯角)$=\angle ACB$，且可推得

$\angle CAB = 90° - \angle BAQ = \angle EAQ$ ，又因為 $\overline{AB} = \overline{AE}$ ，所以

$\Delta AEQ \cong \Delta ABC$ (AAS 全等)。

因為 $\overline{AI} = \overline{AC}, \angle AIM = 90° = \angle ACB$ ，又因為 $\angle IAM = 90° - \angle MAC = \angle CAB$ ，所以

$\Delta ABC \cong \Delta AMI$ (ASA 全等)。

因為 $\overline{BP} // \overline{AC}, \overline{AP} // \overline{BC}, \angle ACB = 90°$ ，得到四邊形 $APBC$ 為長方形，所以

$\Delta ABC \cong \Delta BAP$ 。

因此可推得

$\Delta AEQ \cong \Delta ABC \cong \Delta AMI \cong \Delta BAP$ ，

得到 $\overline{AM} = \overline{BA} = \overline{AE}, \overline{EQ} = \overline{AP} = \overline{BC}, \angle AEQ = \angle ABC$ 。

2. 證明四邊形 $BDRP$ 與四邊形 $AMNC$ 全等。

因為 $\overline{BP} = \overline{AC}, \overline{BD} = \overline{AE} = \overline{AM}$，又因為 $\angle PBD = 90° - \angle ABP = 90° - \angle BAC = \angle CAM$ ，所以

$\Delta BDP \cong \Delta AMC$ (SAS 全等)，

得到 $\overline{DP} = \overline{MC}, \angle BDP = \angle AMC, \angle DPB = \angle MCA$ 。

因為 $\overline{MN} // \overline{AB}, \angle MAB = 90°$ ，可得到 $\angle NMC = 90° - \angle AMC = 90° - \angle BDP = \angle RDP$ ，又因為 $\angle ACN = 90° = \angle BPR$，可推得 $\angle NCM = 90° - \angle ACM = 90° - \angle DPB = \angle RPD$ ，又 $\overline{MC} = \overline{DP}$ ，所以

$\Delta DRP \cong \Delta MNC$ (ASA 全等)。

因為 $\Delta BDP \cong \Delta AMC, \Delta DRP \cong \Delta MNC$ ，所以

四邊形 $BDRP$ 與四邊形 $AMNC$ 全等，得到 $\overline{MN} = \overline{DR}$ 。

3. 證明 $\Delta ERQ \cong \Delta BLC$ 。

因為 $\overline{EQ} = \overline{BC}, \angle EQR = 90° = \angle BCL$，且 $\angle REQ = 90° - \angle AEQ = 90° - \angle ABC = \angle LBC$ ，所以

$\Delta ERQ \cong \Delta BLC$ (ASA 全等)，得到 $\overline{ER} = \overline{BL}$ 。

4. 證明四邊形 $APST$ 與四邊形 $BGFL$ 全等。

因為 $\overline{PS} = \overline{BG} = \overline{GF} = \overline{BC} = \overline{AP}$, 且 $\angle APS = 90° = \angle BGF$ ，所以

$\Delta APS \cong \Delta BGF$ (SAS 全等)，

得到 $\overline{AS} = \overline{BF}, \angle ASP = \angle BFG = 45°, \angle SAP = \angle FBG = 45°$ 。

因為 $\overline{TS} // \overline{BC}, \angle CBG = 90°$，得到 $\angle TSP = 90° = \angle LFG$，且 $\angle TSA = 90° - \angle ASP = 90° - \angle BFG = \angle LFB$ ，又因為 $\angle TAS = \angle TAP - \angle SAP = \angle LBG - \angle FBG = \angle LBF$ ，且 $\overline{AS} = \overline{BF}$ ，所以

$\Delta ATS \cong \Delta BLF$ (ASA 全等)。

因為 $\Delta APS \cong \Delta BGF, \Delta ATS \cong \Delta BLF$ ，所以

四邊形 $APST$ 與四邊形 $BGFL$ 全等，得到 $\overline{AT} = \overline{BL}$ 。

5. 證明 $\Delta BTS \cong \Delta MNH$ 。

因為 $\overline{ER} = \overline{BL} = \overline{AT}, \overline{DR} = \overline{MN}, \overline{AB} = \overline{ED}$，可推得 $\overline{MN} = \overline{DR} = \overline{ED} - \overline{ER} = \overline{AB} - \overline{AT} = \overline{BT}$ ，

又因為 $\angle TBS = \angle MAI = 90° - \angle AMI = \angle NMH$ ，且 $\angle MHN = 90° = \angle BST$ ，所以

$\Delta BTS \cong \Delta MNH$ (AAS 全等)。

6. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= (\Delta AEQ\text{面積} + \text{四邊形}BDRP\text{面積} + \Delta BTS\text{面積}) + (\Delta ERQ\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}APST\text{面積}) \\
&= (\Delta AMI\text{面積} + \text{四邊形}AMNC\text{面積} + \Delta MNH\text{面積}) + (\Delta BLC\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}BGFL\text{面積}) \\
&= \text{正方形}ACHI\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積}
\end{aligned}
$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 3 月 26 日想到的。

2.心得：此題與 G016 幾近相同，作圖方式與證明過程大同小異，都是將正方形分割出若干區塊，再一一證明這些區塊全等，最後再藉由面積拼合的概念，推導出勾

股定理。此題證明因為牽涉到四邊形的全等證明，需要再分割成兩個三角形，所以整個證明過程冗長且複雜，對於國中生而言可說是相當有難度的一個證明方式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：