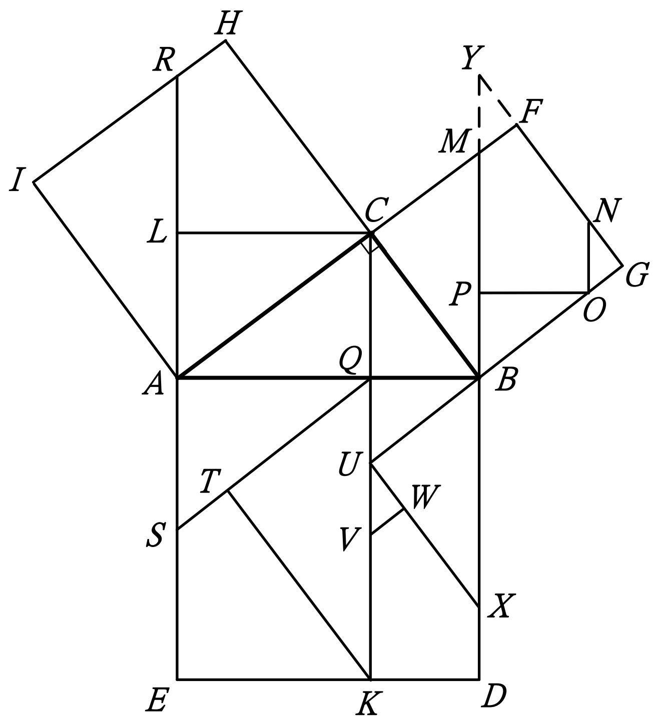
勾股定理證明-G018

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ABDE, ACHI, BCFG$。
2. 延長$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{DB}$，交$\overline{HI},\overline{CF}$於$R,M$。
3. 過C作$\overline{AB},\overline{ED}$的垂直線$\overline{CQ},\overline{CK}$。
4. 過C,Q作$\overline{AB},\overline{AC}$的平行線$\overline{CL},\overline{QS}$。
5. 延長$\overrightarrow{GB}$，交$\overline{CK}$於U，並過U,K作$\overline{UX}//\overline{BC}//\overline{KT}$。
6. 在$\overline{BG}$上取$\overline{BO}=\overline{BU}$，並過$O$作$\overline{OP}\perp\overline{BM},\overline{ON}//\overline{BM}$。
7. 在$\overline{UK}$上取$\overline{UV}=\overline{NO}$，並過$V$作$\overline{VW}//\overline{GB}$。
8. 延長$\overrightarrow{GF},\overrightarrow{BM}$，且交於$Y$。



【求證過程】

先證明長方形$AEKQ$中的區域可拼合出正方形$ACHI$，再證明長方形$QKDB$中的區域可拼合出正方形$BCFG$。最後再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta ARI \cong \Delta ABC \cong \Delta KQT$。

   因為$\overline{AI}=\overline{AC}, \angle AIR = 90° = \angle ACB$，又因為$\angle IAR = 90° - \angle RAC = \angle CAB$，所以

   $$\Delta ARI \cong \Delta ABC \text{(ASA 全等)。}$$

   因為$\overline{QS}//\overline{AC}, \overline{KT}//\overline{BC}$，且$\angle ACB = 90°$，得到$\angle KTQ = 90° = \angle ACB$，且可推得

   $\angle CAB = \angle AQS$(內錯角)$= 90° - \angle KQT = \angle QKT$，又因為$\overline{AB}=\overline{QK}$，所以

   $$\Delta KQT \cong \Delta ABC \text{(AAS 全等)。}$$

   因此可推得

   $$\Delta ARI \cong \Delta ABC \cong \Delta KQT，$$

   得到$\overline{AR}=\overline{AB}=\overline{AE}, \overline{AI}=\overline{KT}$。

2. 證明$\Delta ACL \cong \Delta SQA$。

   因為$\overline{CL}//\overline{AB}, \overline{CQ}//\overline{LA}, \overline{AC}//\overline{SQ}$，且$\angle LAQ = 90°$，得到四邊形$AQCL$為長方形，且

   四邊形$ACQS$為平行四邊形，所以可推得$\angle ALC = 90° = \angle SAQ$，且$\overline{AL}=\overline{CQ}=\overline{AS}$，

   又因為$\angle ACL = \angle QAC = \angle SQA$(內錯角)，所以

   $\Delta ACL \cong \Delta SQA$(ASA 全等)，得到$\overline{LC}=\overline{AQ}$。

3. 證明四邊形$SEKT$與四邊形$RLCH$全等。

   因為$\overline{AR}=\overline{AE}, \overline{AL}=\overline{AS}$，可推得$\overline{SE}=\overline{AE}-\overline{AS}=\overline{AR}-\overline{AL}=\overline{RL}$，又因為$\overline{EK}=\overline{AQ}=\overline{LC}$，

   且$\angle RLC = 90° = \angle SEK$，所以

   $\Delta SEK \cong \Delta RLC$(SAS 全等)，得到$\overline{SK}=\overline{RC}$。

   因為$\overline{SK}=\overline{RC}, \overline{KT}=\overline{AI}=\overline{CH}$，且$\angle KTS = 90° = \angle CHR$，所以

   $$\Delta KST \cong \Delta CRH \text{(RHS 全等)。}$$

   因為$\Delta SEK \cong \Delta RLC, \Delta KST \cong \Delta CRH$，所以

   四邊形$SEKT$與四邊形$RLCH$全等。

4. 證明$\Delta XBU \cong \Delta BMC$。

   因為$\overline{BU}//\overline{MC}, \overline{XU}//\overline{BC}, \overline{CU}//\overline{MX}$，得到四邊形$CUBM$與四邊形$CUXB$均為平行四

邊形，所以$\overline{MC}=\overline{BU},\overline{CB}=\overline{UX}$ ，又因為$\angle ACB=90°$，得到$\angle XUB=90°=\angle BCM$ ，所以

$$\Delta XBU\cong\Delta BMC\ \ \text{(SAS 全等)，得到}\ \overline{BM}=\overline{XB},\overline{BU}=\overline{MC}\ 。$$

5. 證明$\Delta BUQ\cong\Delta OBP$。

因為$\overline{OP}//\overline{AB},\overline{PB}//\overline{QU}$ ，得到$\angle BOP=\angle UBQ,\angle OBP=\angle BUQ$ (同位角)，又因為

$\overline{BO}=\overline{BU}$ ，所以

$$\Delta BUQ\cong\Delta OBP\ \ \text{(ASA 全等)。}$$

6. 證明$\Delta UVW\cong\Delta NOG\cong\Delta YMF$ 。

因為$\overline{VW}//\overline{UB},\angle BUX=90°$ ，得到$\angle UWV=90°=\angle NGO$ ，又因為$\overline{NO}//\overline{BM}//\overline{VC}$ ，

可推得$\angle NOG=\angle PBO=\angle QUB=90°-\angle VUW=\angle UVW$ ，又因為$\overline{UV}=\overline{NO}$ ，所以

$$\Delta UVW\cong\Delta NOG\ \ \text{(AAS 全等)。}$$

因為$\overline{BO}=\overline{BU}=\overline{CM},\overline{BG}=\overline{CF}$ ，可推得$\overline{OG}=\overline{BG}-\overline{BO}=\overline{CF}-\overline{CM}=\overline{MF}$ ，又因為

$\angle NGO=90°=\angle YFM$ ，且$\angle NOG=\angle PBO=\angle BMC=\angle YMF$ ，所以

$$\Delta NOG\cong\Delta YMF\ \text{(ASA 全等)。}$$

因此可推得

$$\Delta UVW\cong\Delta NOG\cong\Delta YMF\ \text{，且}$$

$$\overline{UV}=\overline{NO}=\overline{YM},\overline{VW}=\overline{OG}=\overline{MF},\overline{UW}=\overline{NG}\ 。$$

7. 證明$\Delta YBG\cong\Delta ABC$ ，進一步推得$\overline{UV}=\overline{NO}=\overline{YM}=\overline{XD}$ 。

因為$\overline{BG}=\overline{BC},\angle YGB=90°=\angle ACB$ ，且$\angle YBG=90°-\angle MBC=\angle ABC$ ，所以

$$\Delta YBG\cong\Delta ABC\ \text{(ASA 全等)，得到}\ \overline{YB}=\overline{AB}\ 。$$

因為$\overline{YB}=\overline{AB}=\overline{BD}$ ，且$\overline{BM}=\overline{XB}$，得到$\overline{YM}=\overline{YB}-\overline{BM}=\overline{BD}-\overline{XB}=\overline{XD}$，所以

$$\overline{UV}=\overline{NO}=\overline{YM}=\overline{XD}\ 。$$

8. 證明五邊形$VKDXW$與五邊形$MPONF$全等。

因為$\overline{XD}=\overline{NO},\angle KDX=90°=\angle PON,\overline{KD}=\overline{QB}=\overline{PO}$ ，

所以

$$\Delta KDX \cong \Delta PON \text{ (SAS 全等)，得到} \overline{KX} = \overline{PN} \text{ 。}$$

因為$\overline{UW} = \overline{NG}, \overline{UX} = \overline{CB} = \overline{FG}$，可推得$\overline{WX} = \overline{UX} - \overline{UW} = \overline{FG} - \overline{NG} = \overline{FN}$，又因為

$\overline{VW} = \overline{MF}, \angle VWX = 90° = \angle MFN$，

所以

$$\Delta VXW \cong \Delta MNF \text{ (SAS 全等)，得到} \overline{VX} = \overline{MN} \text{ 。}$$

因為$\overline{BY} = \overline{AB} = \overline{QK}, \overline{MY} = \overline{UV}, \overline{BP} = \overline{UQ}$，可推得$\overline{PM} = \overline{BY} - \overline{MY} - \overline{BP} = \overline{KQ} - \overline{UV} -$

$\overline{QU} = \overline{VK}$，又因為$\overline{KX} = \overline{PN}, \overline{VX} = \overline{MN}$

所以

$$\Delta KXV \cong \Delta PNM \text{ (SSS 全等)。}$$

由上述討論，可知

五邊形$VKDXW$與五邊形$MPONF$全等。

9. 討論長方形$AEKQ$，長方形$QKDB$，正方形$ACHI$，與正方形$BCFG$之面積關係。

$$\begin{aligned}
\text{長方形}AEKQ\text{面積} &= \Delta KQT\text{面積} + \Delta SQA\text{面積} + \text{四邊形}SEKT \\
&= \Delta ARI\text{面積} + \Delta ACL\text{面積} + \text{四邊形}RLCH \\
&= \text{正方形}ACHI\text{面積}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{長方形}QKDB\text{面積} &= \Delta XBU\text{面積} + \Delta BUQ\text{面積} + \Delta UVW\text{面積} + \text{五邊形}VKDXW \\
&= \Delta BMC\text{面積} + \Delta OBP\text{面積} + \Delta NOG\text{面積} + \text{五邊形}MPONF \\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積}
\end{aligned}$$

10. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABDE\text{面積} &= \text{長方形}QKDB\text{面積} + \text{長方形}AEKQ\text{面積} \\
&= \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}
\end{aligned}$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：這個證明出自於以下書籍：

Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann.

2.心得：此題證明過程，將正方形分割出若干區塊，再一一證明這些區塊全等，最後再藉由面積拼合的概念，推導出勾股定理。此題證明因為牽涉到四邊形、五邊形的全等證明，需要再分割成兩個三角形、及三個三角形，所以整個證明過程冗長且複雜，對於國中生而言可說是相當有難度的一個證明方式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4.補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：