勾股定理證明-G020

【作輔助圖】

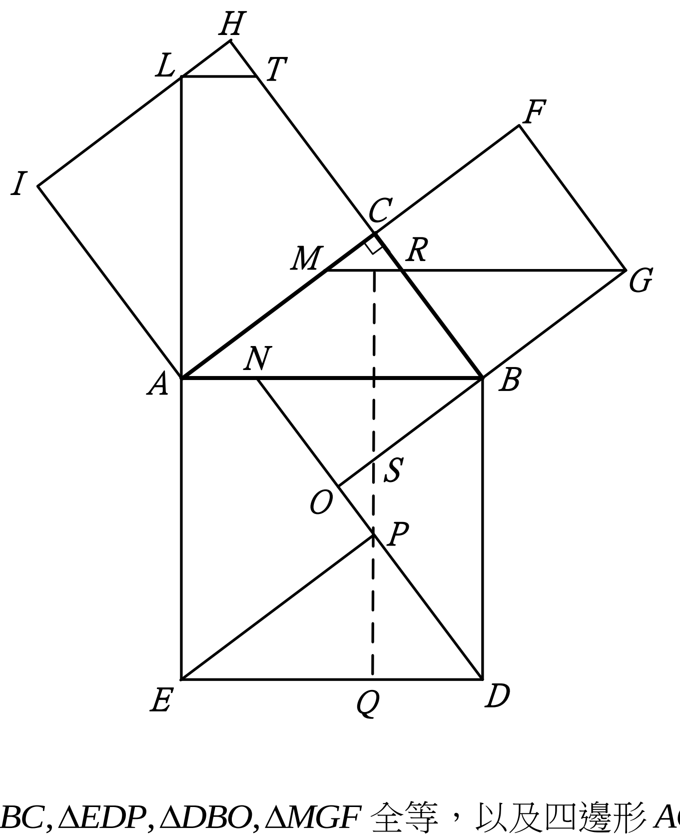
1. 以 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE, ACHI, BCFG$。

2. 延長 $\overrightarrow{EA}$，交 $\overline{HI}$ 於 L，並過 L 作 $\overline{AB}$ 的平行線且交 $\overline{HC}$ 於 T。

3. 過 G 作 $\overline{AB}$ 的平行線且交 $\overline{AC},\overline{BC}$ 於 M,R。

4. 過 D 作 $\overline{BC}$ 的平行線，且交 $\overline{AB}$ 於 N。

5. 過 B,E 作 $\overline{AC}$ 的平行線，且交 $\overline{DN}$ 於 O,P。



【求證過程】

先證明 $\Delta ALI,\Delta ABC,\Delta EDP,\Delta DBO,\Delta MGF$ 全等，以及四邊形 $ACTL$ 與四邊形 $AEPN$ 全等，再討論正方形 $BCFG$ 與正方形 $ACHI$ 中的區域可拼合出正方形 $ABDE$。最後再利用面積和相等的關係，可推出勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\Delta ALI \cong \Delta ABC \cong \Delta EDP \cong \Delta DBO \cong \Delta MGF$。

因為 $\overline{AI}=\overline{AC}, \angle AIL = 90° = \angle ACB$，又因為 $\angle IAL = 90° - \angle LAC = \angle CAB$，所以

$$\Delta ALI \cong \Delta ABC \text{(ASA 全等)}。$$

因為 $\overline{AC}//\overline{EP},\overline{BC}//\overline{DP}$，且 $\angle ACB = 90°$，得到 $\angle EPD = 90° = \angle ACB$，且可推得

$\angle CAB = 90° - \angle LAC = 90° - \angle AEP = \angle PED$，又因為 $\overline{AB} = \overline{ED}$，所以

$\Delta EDP \cong \Delta ABC$ (AAS 全等)。

因為 $\overline{BO} // \overline{AC}, \overline{DO} // \overline{BC}$，且 $\angle ACB = 90°$，得到 $\angle DOB = 90° = \angle ACB$，且可推得

$\angle CBA = 90° - \angle NBO = \angle DBO$，又因為 $\overline{AB} = \overline{BD}$，所以

$\Delta DBO \cong \Delta ABC$ (AAS 全等)。

因為 $\overline{GM} // \overline{BA}$，得到 $\angle FMG = \angle CAB$，又因為 $\angle MFG = 90° = \angle ACB, \overline{FG} = \overline{CB}$，所以

$\Delta MGF \cong \Delta ABC$ (AAS 全等)。

因此可推得

$\Delta ALI \cong \Delta ABC \cong \Delta EDS \cong \Delta DBO \cong \Delta MGF$，

得到 $\overline{AL} = \overline{AB} = \overline{MG}, \overline{AC} = \overline{EP}, \overline{LI} = \overline{BO} = \overline{GF}, \angle CAB = \angle PED$。

2. 證明四邊形 $ACTL$ 與四邊形 $AEPN$ 全等。

因為 $\angle CAB = \angle PED$，可推得 $\angle LAC = 90° - \angle CAB = 90° - \angle PED = \angle AEP$，又因為

$\overline{AL} = \overline{AB} = \overline{AE}, \overline{AC} = \overline{ES}$，所以

$\Delta ACL \cong \Delta EPA$ (SAS 全等)，得到

$\overline{LC} = \overline{AP}, \angle ALC = \angle EAP, \angle ACL = \angle EPA$。

因為 $\angle ALC = \angle EAP, \angle ACL = \angle EPA$，可推得

$\angle TLC = 90° - \angle ALC = 90° - \angle EAP = \angle NAP$，且 $\angle TCL = 90° - \angle ACL = 90° - \angle EPA$

$= \angle NPA$，又因為 $\overline{LC} = \overline{AS}$，所以

$\Delta LCT \cong \Delta APN$ (ASA 全等)。

因為 $\Delta ACL \cong \Delta EPA, \Delta LCT \cong \Delta APN$，所以

四邊形 $ACTL$ 與四邊形 $AEPN$ 全等。

3. 證明 $\Delta BNO \cong \Delta GRB$。

因為 $\overline{GM} // \overline{BA}$，得到 $\angle NBO = \angle RGB$，又因為 $\overline{BO} = \overline{GF} = \overline{BG}$，且 $\angle BON = 90° =$

$\angle GBR$，所以

$\Delta BNO \cong \Delta GRB$ (ASA 全等)。

4. 證明 $\Delta LTH \cong \Delta MRC$。

因為 $\overline{MG} = \overline{AB}$，且 $\overline{MG} // \overline{AB}$，所以四邊形 $ABGM$ 為平行四邊形，而得到 $\overline{BG} = \overline{AM}$。

又因為 $\overline{IL} = \overline{FG} = \overline{BG}$，及 $\overline{AC} = \overline{IH}$，因此可推得 $\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = \overline{IH} - \overline{IL} = \overline{LH}$。而

且因為 $\overline{LT} // \overline{AB} // \overline{MG}$，得到 $\angle LTH = \angle MRC$ (同位角)，以及 $\angle LHT = 90° = \angle MCR$，所以

$$\Delta LTH \cong \Delta MRC \quad \text{(AAS 全等)}。$$

5. 討論 $\Delta DBO, \Delta MRC, \Delta LTH$ 與四邊形 $RGFC$ 的面積關係。
   因為 $\Delta LTH \cong \Delta MRC, \Delta DBO \cong \Delta MGF$，所以

$$\begin{aligned} \Delta DBO\text{面積} &= \Delta MGF\text{面積} \\ &= \Delta MRC\text{面積} + \text{四邊形}RGFC\text{面積} \\ &= \Delta LTH\text{面積} + \text{四邊形}RGFC\text{面積} \end{aligned}$$

6. 討論正方形 $ABDE$，正方形 $BCFG$，與正方形 $ACHI$ 之面積關係。

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABDE\text{面積} &= \text{四邊形}AEPN\text{面積} + \Delta EDP\text{面積} + \Delta DBO\text{面積} + \Delta BNO\text{面積} \\ &= \text{四邊形}LACT\text{面積} + \Delta ALI\text{面積} + (\Delta LTH\text{面積} + \text{四邊形}RGFC \\ &\quad \text{面積}) + \Delta GRB\text{面積} \\ &= (\text{四邊形}LACT\text{面積} + \Delta ALI\text{面積} + \Delta LTH\text{面積}) + (\text{四邊形}RGFC \\ &\quad \text{面積} + \Delta GRB\text{面積}) \\ &= \text{正方形}ACHI\text{面積} + \text{正方形}BCFG\text{面積} \end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股氏定理的關係式：

$$\text{正方形}ABDE\text{面積} = \text{正方形}BCFG\text{面積} + \text{正方形}ACHI\text{面積}$$

   因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *5*(6/7), 169.

2.心得：此題證明將正方形 $ACHI$ 與正方形 $BCFG$ 切割成若干圖形，接著再利用圖形的組合，及全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形的面積組合恰好等於正方形 $ABDE$，整體推導過程仍為複雜，需要一一證明這些三角形或四邊形的全等關係及面積關係，進而推導出勾股定理。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充