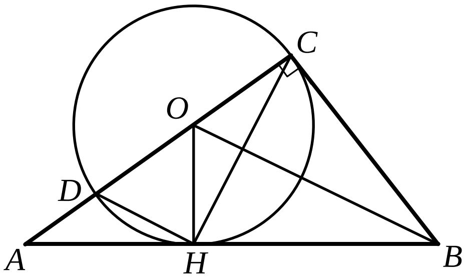
勾股定理證明-A080

【作輔助圖】

1. 作$\angle ABC$之分角線$\overrightarrow{BO}$交$\overline{AC}$於O點 。

2. 以點O為圓心，$\overline{OC}$為半徑作圓，且此圓與$\overline{AB}$相切於點H 。

3. 連接$\overline{HD},\overline{HC},\overline{OH}$ 。



【求證過程】

透過相似三角形，對應邊成比例的關係式，即可推得勾股定理的關係式。

1. 先證明$\Delta AHD \sim \Delta ACH$ ，再利用對應邊成比例推得關係式。

   因為$\angle AHD(\text{弦切角}) = \frac{1}{2}HD = \angle ACH(\text{圓周角}), \angle HAD = \angle HAC(\text{共用角})$ ，所以

   $\Delta AHD \sim \Delta ACH$ (AA 相似)，

   得到

   $$\overline{AH}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AH} \quad (\text{令}\ \overline{AB}=c,\overline{AC}=b,\overline{BC}=a,\overline{OC}=r\ )$$

   即

   $$c-a:b=b-2r:c-a$$

   $$(c-a)^2=b^2-2br$$

   故

   $$(c-a)^2+2br=b^2.$$

2. 再證明$\Delta AHO \sim \Delta ACB$ ，再利用對應邊成比例推得關係式。

   因為$\angle AHO = 90^\circ = \angle ACB, \angle HAO = \angle BAC$ ，可得$\Delta AHO \sim \Delta ACB$ (AA 相似)，所以

   $$\overline{AH}:\overline{AC}=\overline{HO}:\overline{CB}$$

   即

   $$c-a:b=r:a$$

故

$$br=(c-a)a.$$

3. 最後整理上述討論，可得

$$(c-a)^2+2a(c-a)=b^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下期刊

Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(4), 81.

2.心得：此題與 A079 類似，但此題在作圖上更為簡易，且此題在推導過程中並未使用到母子相似性質，僅由相似三角形的對應邊成比例，整理關係式即可得勾股定理的關係式，在教學中，可以提供學生比較 A079 和 A080 兩種方式，觀察學生對於這兩種的看法有何不同。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		