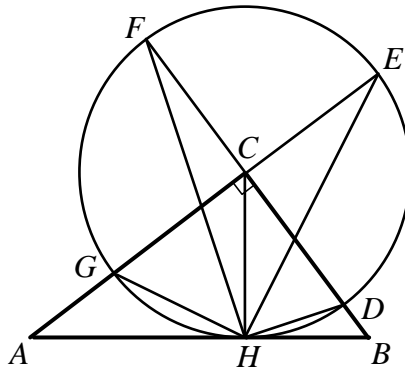


勾股定理證明-A079

【作輔助圖】

1. 作 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 。
2. 以點 C 為圓心， \overline{CH} 為半徑作圓，且此圓交 \overline{CA} , \overline{CB} 於點 G, D 。
3. 延長 \overline{BC} , \overline{AC} 交圓於點 F, E ，並連接 \overline{FH} , \overline{EH} 。



【求證過程】

透過相似三角形，對應邊成比例的關係式，以及直角三角形 ABC 的母子相似性質，即可推得勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\triangle AHG \sim \triangle AEH$ ，得到對應邊成比例。

因為 $\angle AHG$ (弦切角) $= \frac{1}{2} \angle HG = \angle AEH$ (圓周角), $\angle HAG = \angle HAE$ (共用角)，所以

$$\triangle AHG \sim \triangle AEH \quad (\text{AA 相似}),$$

得到

$$\overline{AH} : \overline{AE} = \overline{AG} : \overline{AH} \quad (\text{令 } \overline{AC} = b, \overline{CH} = r)$$

即

$$\overline{AH} : b + r = b - r : \overline{AH}$$

故

$$\overline{AH}^2 = b^2 - r^2.$$

2. 再證明 $\triangle BHD \sim \triangle BFH$

因為 $\angle BHD$ (弦切角) $= \frac{1}{2} \angle HD = \angle BFH$ (圓周角), $\angle DBH = \angle FBH$ (共用角)，所以

$$\triangle BHD \sim \triangle BFH \quad (\text{AA 相似}),$$

得到

$$\overline{BH} : \overline{BF} = \overline{BD} : \overline{BH} \quad (\text{令 } \overline{CB} = a)$$

即

$$\overline{BH} : a + r = a - r : \overline{BH}$$

故

$$\overline{BH}^2 = a^2 - r^2.$$

3. 最後由直角三角形 ABC ，利用母子相似性質推得勾股定理的關係式。
因為 $\triangle ABC$ 為直角三角形，所以由母子相似性質，可得

$$\overline{CH}^2 = \overline{HA} \times \overline{HB},$$

即

$$r^2 = \overline{HA} \times \overline{HB}$$

綜合上述討論，可得

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = a^2 + b^2 - 2r^2$$

因為 $\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = (\overline{AH} + \overline{BH})^2 - 2\overline{AH} \times \overline{BH} = \overline{AB}^2 - 2r^2$ ，所以

$$\overline{AB}^2 - 2r^2 = a^2 + b^2 - 2r^2 \quad (\text{令 } \overline{AB} = c)$$

故

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明出自以下期刊

Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 5(3), 300.

2. 心得：此題作圖清晰，透過作圖，從圖形中找出相似三角形，再利用對應邊成比例，找出與直角三角形三邊之關係式，最後以母子相似性質做整理，對於國中生而言，整個推論過程均容易理解，在教學上，老師可引導學生去觀察相似三角形。

3. 評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		