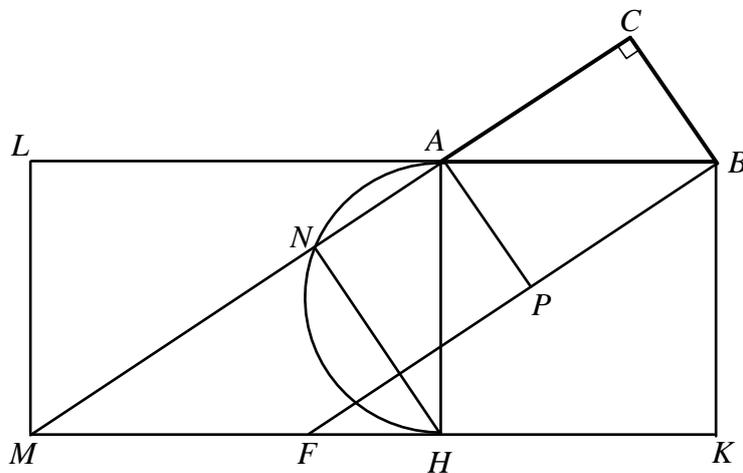


## 勾股定理證明-A078

### 【作輔助圖】

1. 以  $\overline{AB}$  為邊長向下作一正方形  $ABKH$ 。
2. 延長  $\overline{KH}$  交  $\overline{CA}$  於點  $M$ ，並作矩形  $AHML}$ 。
3. 作  $\overline{BF} \parallel \overline{CA}$ ,  $\overline{HN} \perp \overline{CM}$ ,  $\overline{AP} \perp \overline{CM}$ ，並以  $\overline{AH}$  為直徑作半圓  $ANH$ 。



### 【求證過程】

先證明兩個直角三角形全等，再藉由正方形與平行四邊形等底等高，面積相等推得關係式，且利用直角三角形母子相似性質，即可推得勾股定理的關係式。

1. 先證明  $\triangle CAB \cong \triangle NHA$ ，進而得到  $\overline{AN} = \overline{AP}$  及  $\overline{CA} = \overline{NH}$ 。

因為  $\overline{BF} \parallel \overline{CA}$ ,  $\overline{AP} \perp \overline{CA}$ ,  $\overline{BC} \perp \overline{CA}$ ，得到四邊形  $APBC$  為矩形，所以  $\overline{CB} = \overline{AP}$ 。

因為  $\overline{AB} = \overline{AH}$ ,  $\angle ANH = 90^\circ = \angle ACB$ ,  $\angle NAH = 90^\circ - \angle LAN = 90^\circ - \angle CAB = \angle ABC$ ，

可得  $\triangle CAB \cong \triangle NHA$  (AAS 全等)，所以

$$\overline{AN} = \overline{CB} = \overline{AP}, \overline{CA} = \overline{NH}$$

2. 先說明四邊形  $AMFB$  為平行四邊形，再說明正方形  $ABKH$  面積和平行四邊形  $AMFB$  面積相等。

因為  $\overline{AB} \parallel \overline{MF}$ ,  $\overline{AM} \parallel \overline{BF}$ ，得到四邊形  $AMFB$  為平行四邊形，所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形 } ABKH \text{ 面積} &= \text{平行四邊形 } AMFB \text{ 面積(同底同高)} \\
&= \overline{BF} \times \overline{AP} \\
&= \overline{AM} \times \overline{AP} \\
&= (\overline{AN} + \overline{MN}) \times \overline{AP}
\end{aligned}$$

故

$$c^2 = (a+x) \times a \quad (\text{其中 } \overline{AB} = c, \overline{CB} = a, \overline{MN} = x)$$

3. 再根據直角  $\triangle AHM$  的母子相似性質求得關係式，進而推得勾股定理。

在直角  $\triangle AHM$  中，由母子相似性質，可得  $\overline{HN}^2 = \overline{NM} \times \overline{NA}$ ，即

$$b^2 = ax \quad (\text{其中 } \overline{NH} = \overline{CA} = b)$$

綜合上述之討論，

得到

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

### 【註與心得】

1. 來源：

2. 心得：此題以斜邊為邊長作一正方形，再設法做出一直角三角形，證明過程中透過等底等高面積相等的概念，以及母子相似性質，進而推出關係式，所使用到的概念，均相當容易理解。

3. 評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		