勾股定理證明-A077

【作輔助圖 *a*】

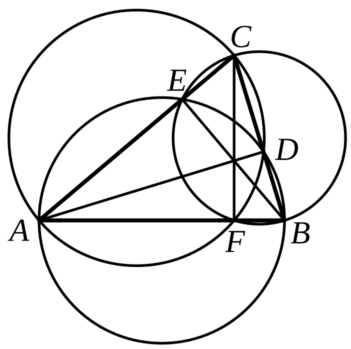
1. 已知任意銳角ΔABC，在其三邊分別作高$\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$。
2. 以ΔABC之三邊長為直徑作圓。

【作輔助圖 *b*】

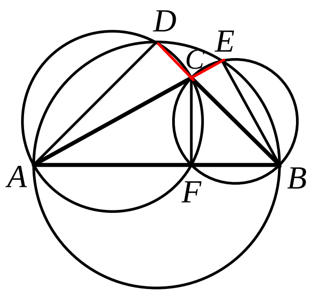
3. 已知任意鈍角ΔABC，其中$\angle C > 90°$，在其三邊分別作高$\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$。
4. 以ΔABC之三邊長為直徑作圓。

【作輔助圖 *c*】

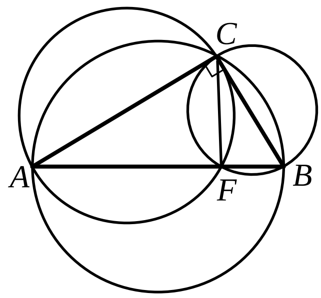
5. 已知任意ΔABC，其中$\angle C = 90°$，作斜邊上的高$\overline{CF}$。
6. 以ΔABC之三邊長為直徑作圓。



圖a



圖b



圖c

【求證過程】

對任意三角形，以三邊長為直徑作圓，再根據圓外冪性質得到關係式。從銳角、鈍角、直角三角形觀察其特例，而推得勾股定理。

1. 圖 *a* 中，先證明以銳角ΔABC三邊長為直徑所作之圓兩兩交於點D,E,F (垂足點)。

因為$\overline{CF} \perp \overline{AB}$，可得$\angle AFC = 90° = \angle BFC$，所以

以$\overline{AC},\overline{BC}$為直徑所作的圓相交於點$F$。

同理，因為$\overline{AD} \perp \overline{BC}, \overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{CF} \perp \overline{AB}$，所以

以$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$為直徑所作的圓兩兩相交於點$D,E,F$。

2. 於圖 a 中，利用圓外冪性質推得關係式。

因為 $\overline{AB},\overline{AC}$ 為以 $\overline{BC}$ 為直徑之圓的割線，所以由圓外冪性質可得

$$\overline{AF}\times\overline{AB}=\overline{AE}\times\overline{AC}$$

同理，$\overline{BC},\overline{BA}$ 為以 $\overline{AC}$ 為直徑之圓的割線，所以由圓外冪性質可得

$$\overline{BF}\times\overline{BA}=\overline{BD}\times\overline{BC}$$

綜合上述可得底下推論

$$\overline{AF}\times\overline{AB}+\overline{BF}\times\overline{BA}=\overline{AE}\times\overline{AC}+\overline{BD}\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}\times(\overline{AF}+\overline{BF})=(\overline{AC}-\overline{CE})\times\overline{AC}+(\overline{BC}-\overline{CD})\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{CE}\times\overline{AC}-\overline{CD}\times\overline{BC}.$$

3. 於圖 b 中，$\angle ACB>90°$，仿照 2.之推論可得關係式。

因為 $\overline{AF}\times\overline{AB}+\overline{BF}\times\overline{BA}=\overline{AE}\times\overline{AC}+\overline{BD}\times\overline{BC}$，所以

$$\overline{AB}\times(\overline{AF}+\overline{BF})=(\overline{AC}+\overline{CE})\times\overline{AC}+(\overline{BC}+\overline{CD})\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{CE}\times\overline{AC}+\overline{CD}\times\overline{BC}.$$

4. 最後根據上述 2. , 3.推論之關係式，就 $\angle C=90°$ 時討論其情況(如圖 c)。

若 $\angle ACB$ 趨近於 $90°$ 時，$\overline{CE}$ 與 $\overline{CD}$ 長會趨近於 0，所以當 $\angle ACB=90°$ 時，

$\overline{CE}=\overline{CD}=0$，

故綜合 2.與 3.之推論，
得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$

即

$$a^2+b^2=c.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊
Heath's Mathematical Monographs, 1900, No. 2, p. 35.

2.心得：此題從任意三角形出發，討論銳角、外角兩種例子，藉由圓外冪得到一個關係式，再討論特殊情況在直角三角形的時候圖形所產生的變動，在中學教學上，可提供學生一個探討幾何的空間，從一般化慢慢縮小至特殊化，即我們所要聚

焦的地方－直角三角形。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		