勾股定理證明-A076

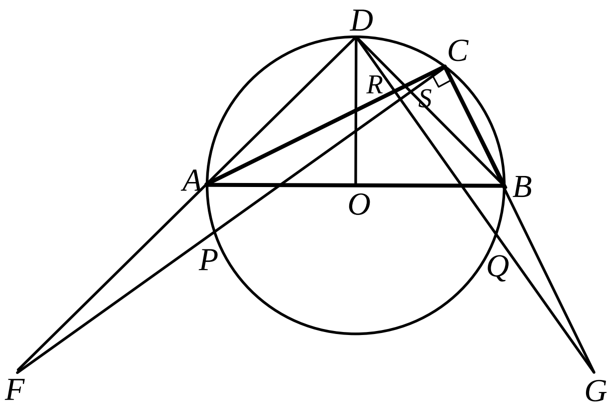
【作輔助圖】

1. 在斜邊$\overline{AB}$上取點O，並以點O為圓心，$\overline{AB}$為直徑作ΔABC之外接圓。

2. 於圓周上取AB的中點D，使$\overline{DO}\perp\overline{AB}$，並連接$\overline{DA},\overline{DB}$ 。

3. 延長$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$，並取$\overline{AF}=\overline{AC},\overline{BG}=\overline{BD}$。

4. 連接$\overline{FC},\overline{GD}$，且分別與$\overline{DB},\overline{AC}$交於點$S,R$ 。



【求證過程】

先說明圖中弦所截出的$AP=BQ$，以及$\overline{AD}=\overline{AR},\overline{BC}=\overline{BS}$，再說明$\Delta FSD$與$\Delta GRC$相似，推得相似形「對應邊成比例」的性質，並導出邊長的關係式，最後將三角形ABC的兩股平方和求出來，整理等式，進而推出勾股定理的關係式。

1. 先證明$AP=BQ$。

因為$\overline{AF}=\overline{AC},\overline{BG}=\overline{BD}$，可得$\Delta AFC,\Delta BGD$為等腰三角形，所以

$$\angle DAC=2\angle F,\angle CBD=2\angle G\text{ (外角定理)}$$

因為$\angle DAC=\frac{1}{2}DC=\angle CBD$，可知$\angle F=\angle G$，得到$\angle ACP=\angle BDQ$，所以

$$AP=BQ$$

2. 證明：$\Delta ADR,\Delta BCS$為等腰三角形，進而推得$\overline{AD}=\overline{AR},\overline{BC}=\overline{BS}$。

因為$\angle ADR=\frac{1}{2}(180^\circ-BQ)$，又$\angle DRA=\frac{1}{2}(AD+CB+BQ)=\frac{1}{2}(180^\circ-CD+BQ)$

$=90^\circ-\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}BQ=90^\circ-\angle CBD+\frac{1}{2}BQ=90^\circ-2\angle BDQ+\frac{1}{2}BQ=90^\circ-BQ+\frac{1}{2}BQ$

$=90^\circ-\frac{1}{2}BQ$，所以$\angle ADR=\angle DRA$，故可推得

ΔADR為等腰三角形

同理可證，ΔBCS亦為等腰三角形。

所以

$$\overline{AD}=\overline{AR},\overline{BC}=\overline{BS}$$

3. 證明$\Delta FSD\sim\Delta GRC$，可得對應邊成比例。

因為$\angle F=\frac{1}{2}(CD-AP)=\frac{1}{2}(CD-BQ)=\angle G,\angle ADS=\frac{1}{2}APB=\angle BCR$，可得

$\Delta FSD\sim\Delta GRC$ (AA 相似)，所以

$$\overline{DS}:\overline{RC}=\overline{DF}:\overline{CG}$$

$$=(\overline{AD}+\overline{AF}):(\overline{BG}+\overline{BC})$$

$$=(\overline{AD}+\overline{AC}):(\overline{BD}+\overline{BC})\quad(\text{因為 }\overline{AF}=\overline{AC},\overline{BG}=\overline{BD})$$

$$=(2\overline{AR}+\overline{RC}):(2\overline{BS}+\overline{SD})\,(\text{因為 }\overline{AD}=\overline{AR},\overline{BC}=\overline{BS})$$

即

$$\overline{DS}\times(2\overline{BS}+\overline{SD})=\overline{RC}\times(2\overline{AR}+\overline{RC})$$

得到

$$\overline{DS}^2+2\overline{BS}\times\overline{DS}=2\overline{AR}\times\overline{RC}+\overline{RC}^2$$

4. 再推得ΔABC的兩股平方和等於$2\overline{AD}^2$。

$$\overline{CA}^2=(\overline{CR}+\overline{RA})^2=\overline{CR}^2+2\overline{CR}\times\overline{RA}+\overline{RA}^2=\overline{CR}^2+2\overline{CR}\times\overline{RA}+\overline{AD}^2$$

$$\overline{CB}^2=\overline{BS}^2=(\overline{BD}-\overline{SD})^2=\overline{BD}^2-2\overline{BD}\times\overline{SD}+\overline{SD}^2=\overline{AD}^2-2(\overline{BS}+\overline{SD})\times\overline{SD}+\overline{SD}^2$$

$$=\overline{AD}^2-2\overline{BS}\times\overline{SD}-\overline{SD}^2$$

所以

$$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=(\overline{CR}^2+2\overline{CR}\times\overline{RA}+\overline{AD}^2)+(\overline{AD}^2-2\overline{BS}\times\overline{SD}-\overline{SD}^2)$$
$$=2\overline{AD}^2$$

5. 最後利用勾股定理證明-A075 之圖 b，等腰直角三角形三邊長之關係式，可推得勾股定理的關係式。

   因為 $\overline{AD}=\overline{DB}$ ，且 $\overline{AB}$ 為直徑，得到 ΔABD 為等腰直角三角形，所以

   $$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2\text{，即 }\overline{AD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$$

   得到

   $$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2$$

   即

   $$a^2+b^2=c.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Jury. Wipper (1880) *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 44). Leipz.: Friese.

2.心得：此證明主軸仍是利用相似三角形的對應邊成比例的關係式，推得勾股定理，但在此之前須說明幾個元件，如 $AP=BQ$, $\overline{AD}=\overline{AR},\overline{BC}=\overline{BS}$ 等等。最後直接了當的求出直角 ΔABC 兩股平方和的關係式，再運用 A-075 等腰直角三角形三邊長的關係式。此題作圖與證明過程均較複雜，因此對於國中生而言較難思考與理解。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充