勾股定理證明-A075

【作輔助圖 *a*】

1. 在$\overline{AC}$上取點F，使$\overline{CF}=\overline{CB}$。

2. 連接$\overline{BF}$，並以$\overline{BF}$為半徑，點B為圓心作半圓，且此半圓與$\overrightarrow{AC},\overline{AB}$交於點$E,G$。

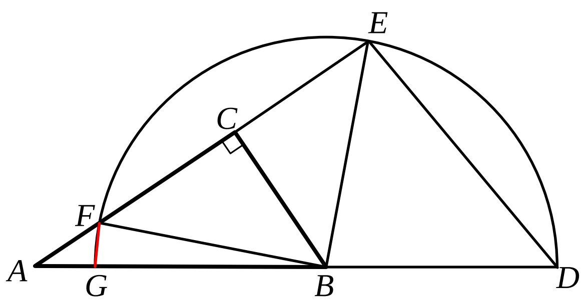
3. 延長$\overrightarrow{AB}$交半圓於點D，並連接$\overline{ED}$。

4. 連接$\overline{FG}$。

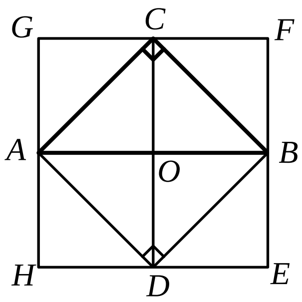
【作輔助圖 *b*】

5. 已知直角ΔABC中，$\overline{CA}=\overline{CB}$，作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$且$\overline{CD}=\overline{AB}$。

6. 作四邊形$CADB$之外接矩形$GHEF$。



圖a



圖b

【求證過程】

先證明ΔAGF與ΔAED相似，推得對應邊成比例的關係式，再利用正方形與直角三角形的面積關係推得等腰直角三角形三邊長的關係，進而推得勾股定理的關係式。

1. 圖 a 中，先證明$\Delta AGF\sim\Delta AED$。

   因為四邊形$FGDE$為圓內接四邊形，得到$\angle AFG=\angle ADE$，又$\angle FAG=\angle DAE$，可知$\Delta AGF\sim\Delta AED$ (AA 相似)，所以

$$\overline{AG}:\overline{AE}=\overline{AF}:\overline{AD}\quad(\text{令}\ \overline{AG}=x,\overline{AF}=y,\overline{FC}=z,\overline{BG}=r)$$

   即

$$x:y+2z=y:x+2r\quad(\text{因為}\ \overline{BC}\ \text{為弦心距，所以}\ \overline{CE}=\overline{CF}=z)$$

   推得

$$x^2+2xr=y^2+2yz$$

2. 圖 b 中，證明：若$\overline{CA}=\overline{CB}$，則$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2$。

因為ΔCAB為等腰直角三角形，且$\overline{CD}\perp\overline{AB},\overline{CD}=\overline{AB}$，可得四邊形$CADB$為正方形，

所以正方形$CADB$之外接矩形$GHEF$亦為正方形。

因為正方形$GHEF$面積 = 正方形$CADB$面積 + $4\times\Delta ACG$，又其中$4\times\Delta ACG=$ 正方形$CADB$面積，所以

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{AC}^2$$

3. 利用 1.與 2.之結果，推出勾股定理的關係式。

圖 a 中，因為ΔCBF為等腰直角三角形，且$\overline{BG}=\overline{BF}=r,\overline{CF}=\overline{CB}=z$，所以由 2.

之結果，可得$r^2=z^2+z^2$。

因為$x^2+2xr=y^2+2yz$，且$r^2=z^2+z^2$，可推論如下：

$$x^2+2xr+r^2=y^2+2yz+z^2+z^2$$
$$(x+r)^2=(y+z)^2+z^2$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

即

$$a^2+b^2=c.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Jury. Wipper (1880) *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 36). Leipz.: Friese.

2.心得：此題作圖方式不易思考，證明過程中會利用到等腰直角三角形的三邊長關係，這裡很巧妙的利用等腰直角三角形拼貼出一個正方形，如圖 b，再利用面積關係推得三邊長的關係(即在特例-等腰直角三角形，三邊長的關係)。最後再與相似三角形對應邊成比例的關係式，推得勾股定理，過程中所運用的概念對於國中生而言不難理解，在教學上可提供學生一個不錯的思考空間。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4.補充