勾股定理證明-A074

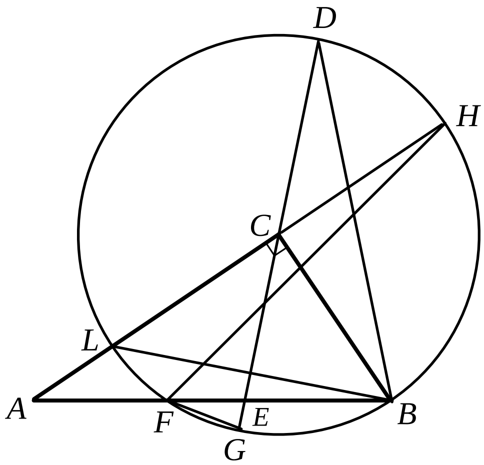
【作輔助圖】

1. 以點 C 為圓心，$\overline{CB}$ 為半徑作圓，且此圓與 $\overline{AC},\overline{AB}$ 交於點 L,F 。

2. 延長 $\overrightarrow{AC}$ 交圓於點 H ，並連接 $\overline{HF},\overline{BL}$ 。

3. 取 $\overline{AB}$ 之中點 E ，並連結 $\overleftrightarrow{CE}$ ，交圓於點 D,G 。

4. 連接 $\overline{FG},\overline{BD}$ 。



【求證過程】

利用相似三角形對應邊成比例，分別找出 $\overline{AF}$ 與 $\overline{FE}$ ，並以直角 ΔABC 三邊長表示之。最後再利用 $\overline{AF},\overline{FE}$ 與 $\overline{AE}$ 之關係，即可推得勾股定理的關係式。

1. 先證明 $\Delta AFH \sim \Delta ALB$，再由對應邊成比例，求得 $\overline{AF}$ 。

因為 $\angle AHF = \frac{1}{2}LF = \angle ABL, \angle FAH = \angle LAB$，可得 $\Delta AFH \sim \Delta ALB$(AA 相似)，所以

$$\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AF} : \overline{AL} \quad (\text{令 } \overline{AB} = c, \overline{CA} = b, \overline{CB} = a)$$

即

$$b + a : c = \overline{AF} : b - a$$

推得到

$$\overline{AF} = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

2. 再證明$\Delta FGE \sim \Delta DBE$ ，再由對應邊成比例，求得$\overline{FE}$

因為$\angle FGE = \frac{1}{2}FD = \angle DBE, \angle GEF = \angle BED$，可得$\Delta FGE \sim \Delta DBE$ (AA 相似)，所以

$$\overline{GE} : \overline{BE} = \overline{FE} : \overline{DE}$$

因為ΔABC為直角三角形，且E為斜邊$\overline{AB}$的中點，可知E為ΔABC的外心，即

$\overline{EC} = \overline{EB} = \overline{EA} = \frac{1}{2}c$ ，所以

$$a - \frac{1}{2}c : \frac{1}{2}c = \overline{FE} : a + \frac{1}{2}c$$

推得到

$$\overline{FE} = \frac{2a^2 - \frac{1}{2}c^2}{c}$$

3. 最後由$\overline{AF}, \overline{FE}$與$\overline{AE}$之關係，推得勾股定理的關係式。

因為$\overline{AF} + \overline{FE} = \overline{AE}$ ，所以

$$\frac{b^2 - a^2}{c} + \frac{2a^2 - \frac{1}{2}c^2}{c} = \frac{1}{2}c$$

即

$$a^2 + b^2 = c.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(4), 11.

Jury. Wipper (1880) *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 41). Leipz.: Friese.

2.心得：此題作圖是以直角頂點為圓心，一股為半徑作圓，再利用此圓與直角三角形之

交點，作出相似三角形，作圖方式較不易取得，但證明過程僅運用相似三角形對應邊的比例關係，是較容易理解的。另外此題與 A071 的證明概念頗為相似，可提供國中生作為比較。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4.補充