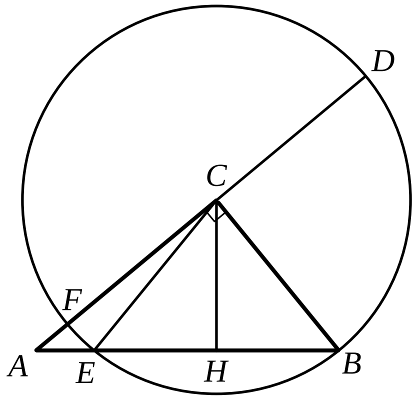
勾股定理證明-A072

【作輔助圖】

1. 以$\overline{CB}$為半徑，點C為圓心作圓。

2. 過點C，作割線$\overline{AD}\perp\overline{CB}$，並連接$\overline{AB}$，而$\overline{AD}$與$\overline{AB}$分別交圓於點$F$、點$E$。

3. 過點C，作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$。



【求證過程】

利用圓外冪性質與直角三角形母子相似性質推得勾股定理。

1. 利用圓外冪性質，推導出關係式。

因為$\overline{CB}=\overline{CE}$且$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，得到$\overline{BH}=\overline{EH}$，即$\overline{BE}=2\overline{BH}$，又由圓外冪性質可知

$\overline{AE}\times\overline{AB}=\overline{AF}\times\overline{AD}$，所以

$$(\overline{AB}-\overline{BE})\times\overline{AB}=(\overline{AC}-\overline{CF})\times(\overline{AC}+\overline{CD})$$
$$(\overline{AB}-2\overline{BH})\times\overline{AB}=(\overline{AC}-\overline{CB})\times(\overline{AC}+\overline{CB})$$

得到

$$\overline{AB}^2-2\overline{BH}\times\overline{AB}=\overline{AC}^2-\overline{CB}^2$$

2. 再利用直角ΔABC的母子相似性質，求得$\overline{BH}^2$，進而推導出勾股定理。

因為$\angle ACB=90^\circ=\angle BHC$，所以由母子相似性質可推得

$$\overline{CB}^2=\overline{BH}\times\overline{BA},\ 即\ \overline{BH}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}}$$

因為$\overline{AB}^2-2\overline{BH}\times\overline{AB}=\overline{AC}^2-\overline{CB}^2$，所以

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$

即

$$a^2 + b^2 = c.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍

J.D. Runkle (1859). *Mathematical Monthly*, v. 2, published in New York and London.

2.心得：此題與 A071 可說是完全相同的證明方式，兩者都是以圓外冪性質即直角三角形的母子相似性質作為推導過程的主軸。而兩者不同之處在於 A071 在推導過程中，將邊長假設為 a,b,c 作為代數運算，而本題則是直接以線段符號(例如 $\overline{AB},\overline{BC}$ 等)作推導。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充