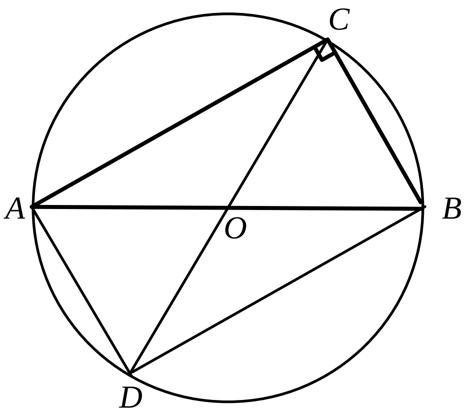
勾股定理證明-A069

【作輔助圖】

1. 取 $\overline{AB}$ 之中點 O 為圓心，並作直角 ΔABC 之外接圓 。

2. 延長 $\overrightarrow{CO}$ 交外接圓於 D 點，並連接 $\overline{AD}$ 與 $\overline{DB}$ 。



【求證過程】

先證明四邊形 $ADBC$ 為矩形，再利用托勒密定理推得勾股定理的關係式。

1. 先證明四邊形 $ADBC$ 為矩形，可得其對邊等長，且對角線等長。

   因為點 O 為直角 ΔABC 之外接圓圓心，且 $\overline{CD}$ 通過圓心 O 為一直徑，可得四邊形 $ADBC$ 為矩形，所以

$$\overline{AC}=\overline{DB}, \overline{AD}=\overline{CB}, \overline{AB}=\overline{CD}$$

2. 利用托勒密定理－圓內接四邊形對角線乘積等於對邊乘積之和，進而推出勾股定理的關係式。

   由托勒密定理，可知

$$\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}+\overline{AD}\times\overline{CB}$$
$$\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{AC}\times\overline{AC}+\overline{CB}\times\overline{CB}$$

   得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

J.D. Runkle (1859). *Mathematical Monthly*, v. 2, published in New York and London.

2.心得：此題證明方式與 A066 一樣，都是利用托勒密定理進行推導。不同之處在於作圖方式，本題是先作直角三角形的外接圓，再以斜邊為對角線作出一個圓內接四邊形，而 A066 則是直接作出圓內接矩形。兩者證明主軸都相同，均為托勒密定理的特例。在國中教學上，可提供學生從不同的角度(作圖方式)切入，進行思考。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4.補充：托勒密定理的證明可參閱 A066。