勾股定理證明-A068

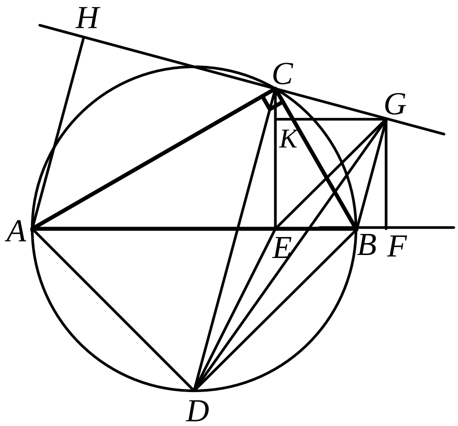
【作輔助圖】

1. 作直角ΔABC外接圓，並在圓上取點D，使$\overline{DA}=\overline{DB}$。

2. 連接$\overline{CD}$，並過點C作$\overline{HG}\perp\overline{CD}$，且$\overline{AH}\perp\overline{HG},\overline{BG}\perp\overline{HG}$。

3. 過點C，作$\overline{CE}\perp\overline{AB}$，並連接$\overline{ED},\overline{EG},\overline{DG}$。

4. 過點G，作$\overline{GF}\perp\overrightarrow{AB},\overline{GK}\perp\overline{CE}$。



【求證過程】

先證明四邊形$EFGK$為正方形，進而推得$\overline{GE}//\overline{BD}$，再藉由三角形等底等高的關係，得到$\Delta BDE$面積等於$\Delta BGC$面積，及$\Delta ADE$面積等於$\Delta AHC$，最後再由$\Delta ADB$面積等於$\Delta BGC$面積與$\Delta AHC$面積之和的關係式，推得勾股定理。

1. 先證明四邊形$EFGK$為矩形，可得$\angle KGF=90°$

   因為$\overline{CE}\perp\overline{AB},\overline{GK}\perp\overline{CE},\overline{GF}\perp\overrightarrow{AB}$，可得四邊形$EFGK$為矩形，所以

   $$\angle KGF=90°$$

2. 再證明$\Delta CKG\cong\Delta BFG$，推得四邊形$EFGK$為正方形，且$\angle BEG=45°$。

   因為直角ΔABC內接於圓，得到$\overline{AB}$ 為直徑，又$\overline{DA}=\overline{DB}$，所以

   $$\angle ABD=\angle BAD=45°=\frac{1}{2}BD=\angle BCD$$

   因為$\overline{HG}\perp\overline{CD},\overline{BG}\perp\overline{CG}$，可得$\angle GCB=90°-\angle BCD=45°=\angle GBC$，所以

   $$\overline{GC}=\overline{GB}$$

因為$\angle CGK = 90° - \angle BGK = \angle BGF, \overline{GC} = \overline{GB}, \angle CKG = 90° = \angle BFG$，可得

$$\Delta CKG \cong \Delta BFG \quad \text{(AAS 全等)}$$

所以

$$\overline{GK} = \overline{GF}$$

因為四邊形$EFGK$為矩形，且$\overline{GK} = \overline{GF}$，所以

四邊形$EFGK$為正方形，且$\angle BEG = 45°$。

3. 利用三角形等底等高證明ΔBGC面積等於ΔBDE面積，且ΔAHC面積等於ΔADE面積。

因為$\angle EBD = 45° = \angle BEG$，可得到$\overline{GE} // \overline{BD}$ (內錯角相等)，所以

$$\Delta BDG \text{面積} = \Delta BDE \text{面積(等底等高)}$$

因為$\overline{DC} \perp \overline{HG}, \overline{BG} \perp \overline{HG}$，得到$\overline{DC} // \overline{BG}$，所以

$$\Delta BGC \text{面積} = \Delta BDG \text{面積(等底等高)}$$

即

$$\Delta BGC \text{面積} = \Delta BDE \text{面積}$$

同理可證

$$\Delta AHC \text{面積} = \Delta ADE \text{面積}$$

4. 利用$\Delta ADB, \Delta BGC, \Delta AHC$的面積關係，推出勾股定理的關係式。

因為$\Delta ADB, \Delta BGC$與ΔAHC為等腰直角三角形，所以

$$\Delta ADB = \frac{1}{4}\overline{AB}^2, \Delta AHC = \frac{1}{4}\overline{AC}^2, \Delta BGC = \frac{1}{4}\overline{BC}^2$$

因為$\Delta ADB\text{面積} = \Delta BDE\text{面積} + \Delta ADE\text{面積} = \Delta BGC\text{面積} + \Delta AHC\text{面積}$，
所以

$$\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{BC}^2$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：這個證明出自於以下書籍

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras*

(Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem) (p. 91). Amsterdam: A. Versluys.
以下文獻有記載：
Fourrey’s　Curiosities　Geometriques, p.79, fig. a.

2.心得：此題的思考方向和 A067 是一樣的，都是利用ΔADB面積$=\Delta BGC$面積$+\Delta AHC$面積，進而推出勾股定理的關係式，但此題作圖方式及推導過程更為複雜，與 A067 相較之下，此題在教學上較不易於國中生理解。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充

等腰直角ΔABC，其中$\angle C=90°$，則其面積為$\frac{1}{4}\overline{AB}^2$。(證明可參閱 A067 的補充證明)