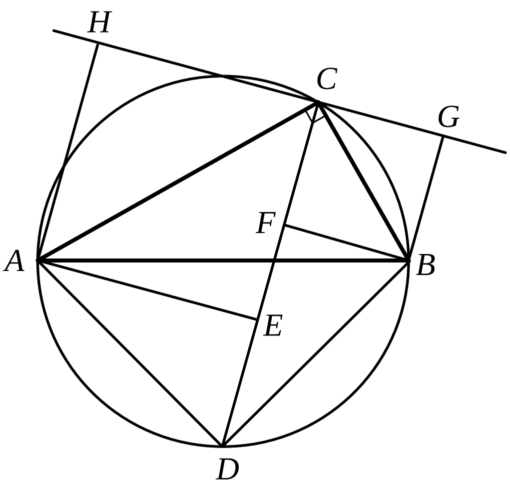
勾股定理證明-A067

【作輔助圖】

1. 作直角ΔABC的外接圓，並在圓上取點D，使$\overline{DA}=\overline{DB}$。

2. 連接$\overline{CD}$，並過點C作$\overleftrightarrow{HG}\perp\overline{CD}$，及作$\overline{AH}\perp\overline{HG},\overline{BG}\perp\overline{HG}$。

3. 過點A、點B，作$\overline{AE}\perp\overline{CD},\overline{BF}\perp\overline{CD}$。



【求證過程】

由四邊形$ADBC$面積與四邊形$ABGH$面積相等，可得ΔADB面積等於ΔACH面積與ΔCBG面積之和的關係式，再推得勾股定理。

1. 先證明四邊形$AECH$與四邊形$BGCF$為正方形

   因為$\overline{HG}\perp\overline{CD},\overline{AH}\perp\overline{HG},\overline{BG}\perp\overline{HG},\overline{AE}\perp\overline{CD},\overline{BF}\perp\overline{CD}$，所以四邊形$AECH$與四邊形$BGCF$為矩形。

   因為直角ΔACB內接於圓，得到$\overline{AB}$為直徑，又$\overline{DA}=\overline{DB}$，可推得

   $$\angle BAD=45^\circ=\frac{1}{2}BD=\angle BCF$$

   $$\angle ABD=45^\circ=\frac{1}{2}AD=\angle ACE$$

   所以

   四邊形$AECH$與四邊形$BFCG$均為正方形

2. 再證明$\Delta DAE\cong\Delta BDF$

   因為$\angle AED=90^\circ=\angle BFD,\angle ADE=90^\circ-\angle BDF=\angle FBD,\overline{AD}=\overline{BD}$，可得到

$$\Delta DAE \cong \Delta BDF \quad (AAS \text{ 全等})$$

所以

$$\overline{AE} = \overline{DF}, \overline{DE} = \overline{BF}$$

3. 由四邊形 $ADBC$ 面積與四邊形 $ABGH$ 面積相等，推得 $\Delta ADB = \Delta ACH + \Delta BCG$。

   因為四邊形 $ADBC$ 面積 $= \frac{1}{2}\overline{CD} \times (\overline{AE} + \overline{BF}) = \frac{1}{2}\overline{CD} \times (\overline{HC} + \overline{CG}) = \frac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{HG}$，又四邊形 $ABGH$ 面積 $= \frac{1}{2}(\overline{AH} + \overline{BG}) \times \overline{HG} = \frac{1}{2}(\overline{DF} + \overline{CF}) \times \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{HG}$，可得到

   $$\text{四邊形 } ADBC \text{ 面積} = \text{四邊形 } ABGH \text{ 面積}$$

   所以

   $$\Delta ADB\text{面積} = \Delta ACH\text{面積} + \Delta BCG\text{面積}$$

4. 最後由 ΔADB面積 $= \Delta ACH$面積 $+ \Delta BCG$面積，可進一步推得勾股定理的關係式。

   因為 ΔADB面積 $= \Delta ACH$面積 $+ \Delta BCG$面積，推導如下：

   $$\Delta ADB\text{面積} = \Delta ACH\text{面積} + \Delta BCG\text{面積}$$

   $$\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\text{正方形}AECH\text{面積} + \frac{1}{2}\text{正方形}BGCF\text{面積}$$

   $$\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overline{AC}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overline{BC}^2$$

   得到

   $$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 90). Amsterdam: A. Versluys.

以下文獻有記載：

Fourrey's Curiosities Geometriques, p.70, fig. a.

2.心得：此題作圖方式較複雜，透過作圖產生以直角三角形兩股為對角線的正方形，再由三角形的面積關係推導出勾股定理的關係式，過程較為複雜，在教學上較不易於國中生理解。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

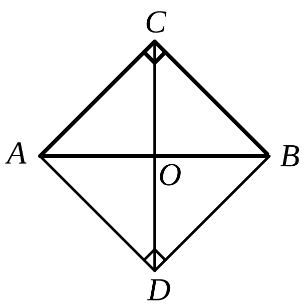
4.補充

(1)正方形面積等於對角線平方的一半。

(2)等腰直角ΔABC，其中$\angle C=90^\circ$，則其面積為$\frac{1}{4}\overline{AB}^2$。

【作圖】

1. 已知直角ΔABC中，$\overline{CA}=\overline{CB}$，作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$且$\overline{CD}=\overline{AB}$。



【證明過程 1】

1. 因為O為$\overline{AB}$的中點，且$\angle C=90^\circ$，所以O為ΔABC的外心，且$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，

   故

$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{面積}&=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\frac{1}{2}\overline{AB}\\&=\frac{1}{4}\overline{AB}^2.\end{aligned}$$

【證明過程 2】

1. 因為$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，且$\overline{CD}=\overline{AB}$，所以四邊形$ADBC$為正方形

   故

$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{面積}&=\frac{1}{2}\text{正方形}ADBC\text{面積}\\&=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD})\\&=\frac{1}{4}\overline{AB}^2.\end{aligned}$$