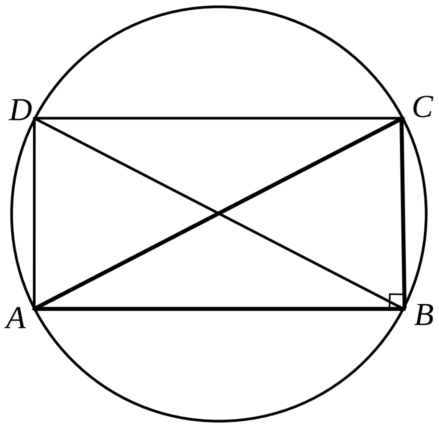
勾股定理證明-A066

【作輔助圖】

1. 作圓內接矩形 $ABCD$ 。

2. 連接 $\overline{AC},\overline{BD}$ 。



【求證過程】

根據托勒密定理，以及矩形對邊等長且對角線等長的性質，可推得勾股定理的關係式。

1. 先說明矩形對邊等長，且對角線等長

   因為四邊形 $ABCD$ 為矩形，所以

$$\overline{AB}=\overline{DC},\overline{AD}=\overline{BC},\overline{AC}=\overline{BD}$$

2. 由托勒密定理，推得勾股定理的關係式

   因為 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$ ，可推得 $\overline{AC}\times\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AB}+\overline{BC}\times\overline{BC}$ ，所以

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍

F C Boon(1924). *A Companion to Elementary School Mathematics*,p107,proof 10.

2.心得：此證明乃托勒密定理的一個特例，然而托勒密定理並非國中數學的教材內容，

但此定理的證明僅使用到相似形的概念，對於國中生而言不難理解，因此在教學時可以補充此定理，再引導學生思考此特例，進而推出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4.補充

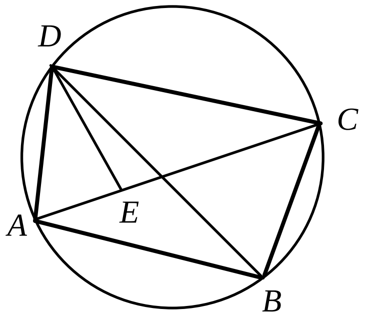
(1)托勒密定理：圓內接四邊形 $ABCD$，滿足 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$。

(2)托勒密定理

【作圖】:

1. 作圓內接四邊形 $ABCD$，並連接 $\overline{AC},\overline{BD}$。

2. 在 $\overline{AC}$ 上取一點 E，使得 $\angle ADB=\angle CDE$。



【證明】:

1. 先證明 $\Delta ADB\sim\Delta EDC$，進而得到對應邊的比例關係。

   因為 $\angle ADB=\angle CDE,\angle ABD=\dfrac{1}{2}AD=\angle DCE$，所以

   $\Delta ADB\sim\Delta EDC$ (AA 相似)

   可推得

   $\overline{AB}:\overline{CE}=\overline{DB}:\overline{DC}$，即 $\overline{AB}\times\overline{DC}=\overline{CE}\times\overline{DB}$

2. 再證明 $\Delta ADE\sim\Delta BDC$，進而得到對應邊的比例關係。

   因為 $\angle ADE=\angle ADB-\angle BDE=\angle CDE-\angle BDE=\angle CDE$，且 $\angle DAE=\dfrac{1}{2}CD=$ $\angle DBC$，所以

   $\Delta ADE\sim\Delta BDC$ (AA 相似)

   可推得

   $\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{BC}$，即 $\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{AE}$

3. 最後由 2.與 3.的結論可推出托勒密定理。

因為 $\overline{AB}\times\overline{DC}=\overline{CE}\times\overline{DB}$ 及 $\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{AE}$ ，可推得

$$
\begin{aligned}
\overline{AB}\times\overline{DC}+\overline{AD}\times\overline{BC} &= \overline{BD}\times\overline{AE}+\overline{CE}\times\overline{DB}\\
&= \overline{BD}\times(\overline{AE}+\overline{CE})\\
&= \overline{BD}\times\overline{AC}
\end{aligned}
$$

所以

$$\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}\text{ 。}$$