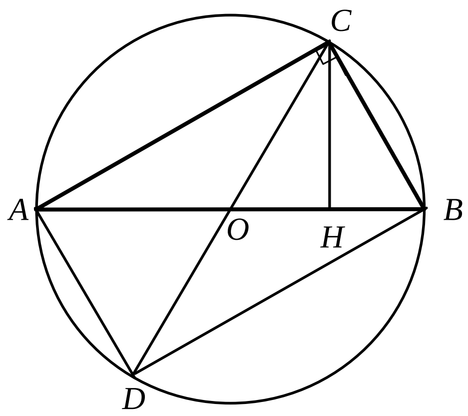
勾股定理證明-A065

【作輔助圖】

1. 取$\overline{AB}$之中點O為圓心，並作直角ΔABC之外接圓　。

2. 延長$\overrightarrow{CO}$　交外接圓於D點，並連接$\overline{AD}$與$\overline{DB}$。

3. 作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$且垂足點為$H$　。



【求證過程】

先說明四邊形$ADBC$為矩形，再利用兩組相似三角形ACD, HCB與三角形DCB, ACH　，其對應邊成比例的關係即可推得勾股定理。

1. 先說明四邊形$ADBC$為矩形

   因為$\overline{AB},\overline{CD}$都是直徑，所以四邊形$ADBC$為矩形，可得到

   $$\overline{AD}=\overline{CB},\overline{AC}=\overline{DB}$$

2. 證明$\Delta ACD \sim \Delta HCB$　，進而得到對應邊的比例關係

   因為$\overline{CD}$為直徑，$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，得到$\angle CAD = 90° = \angle CHB$，又$\angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \angle CBH$，

   所以

   $$\Delta ACD \sim \Delta HCB \text{ (AA 相似)}$$

   可推得

   $$\overline{CD}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{HB}\text{ ，即}\overline{CD}\times\overline{HB}=\overline{CB}\times\overline{AD}$$

3. 再證明$\Delta DCB \sim \Delta ACH$　，進而得到對應邊的比例關係

   因為$\overline{CD}$為直徑，$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，得到$\angle CBD = 90° = \angle CHA$，又$\angle CDB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \angle CAH$，

所以

$$\Delta DCB \sim \Delta ACH \text{ (AA 相似)}$$

可推得

$$\overline{DC}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{AH}\text{，即 }\overline{DC}\times\overline{AH}=\overline{AC}\times\overline{DB}$$

4. 由 2.與 3.的結論可推出勾股定理的關係式

因為 $\overline{CD}\times\overline{HB}=\overline{CB}\times\overline{AD}$ 且 $\overline{DC}\times\overline{AH}=\overline{AC}\times\overline{DB}$，可得到

$$\overline{CD}\times(\overline{HB}+\overline{AH})=\overline{CB}\times\overline{AD}+\overline{AC}\times\overline{DB}$$

因為四邊形 $ABDC$ 為矩形且 $\overline{HB}+\overline{AH}=\overline{AB}$，可得到 $\overline{AB}=\overline{CD}$，所以

$$\overline{CD}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{AC}^2\text{。}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry* (p.161). New York : Macmillan and co.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(4), 11.

2.心得：此證明主要是利用相似三角形的對應邊成比例的關係，進而推導出勾股定理的關係式，對於國中生而言是一個相當淺顯易懂的證明方式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充