勾股定理證明-A064

【作輔助圖】

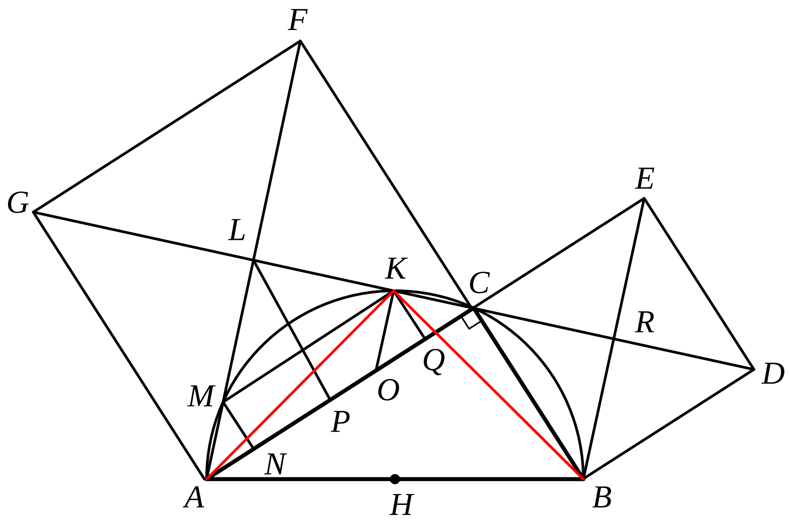
1. 以$\overline{HB}$為半徑，H 為圓心作半圓ACB，並連接$\overline{AC},\overline{BC}$。

2. 分別以$\overline{AC},\overline{BC}$為邊長向外作正方形$ACFG, BCED$，且兩正方形的對角線分別交於 L、R；又$\overline{GC}$與$\overline{AF}$交半圓於K與M。

3. 在$\overline{AC}$上取Q, N，使$KQNM$為一矩形。

4. 在$\overline{AC}$上取O, P，使$\overline{KO}//\overline{AL}, \overline{LP}\perp\overline{AC}$。

5. 連接$\overline{KA},\overline{KB}$。



【求證過程】

先說明正方形$BCED$與正方形$ACFG$的對角線在同一直線上，再證明ΔKLA與ΔBRK全等，而推得三角形$\Delta CAB, \Delta KLA, \Delta KBR$的面積關係，最後再討論$\Delta KAB$, $\Delta CBR, \Delta CAL$的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。

1. 先說明G, C, D共線。

   因為$\overline{CD},\overline{CG}$分別為正方形$BCED$與正方形$ACFG$的對角線，得到$\angle BCD=45^\circ$ $=\angle ACG$，又$\angle ACB=90^\circ$，可推得$\angle BCD+\angle ACB+\angle ACG=180^\circ$，所以 G, C, D共線。

2. 證明$BC=MK$，進而推出$\overline{BC}=\overline{MK}=\overline{NQ}=\overline{AO}$。

因為$\angle ALC = 90^\circ = \frac{1}{2}(ABC - MK) = \frac{1}{2}(180^\circ + BC - MK)$，

所以

$$BC = MK \text{，可得到} \overline{BC} = \overline{MK} \text{。}$$

因為四邊形$MNQK$為矩形，所以$\overline{MK} = \overline{NQ}$且$\overline{MK} // \overline{NQ}$，又因為$\overline{KO} // \overline{MA}$，可知四邊形$MAOK$為平行四邊形，而得到$\overline{MK} = \overline{AO}$，

故

$$\overline{BC} = \overline{MK} = \overline{NQ} = \overline{AO}.$$

3. 再證明$\Delta KLA \cong \Delta BRK$。

因為$\angle AFC = 45^\circ = \frac{1}{2}(AB - MKC) = \frac{1}{2}(180^\circ - MKC)$，得到$MKC = 90^\circ = MK + KC$，

所以$90^\circ = BC + KC = BCK$，又因為$BCK + AMK = 180^\circ$，可推得$BCK = AMK = 90^\circ$，

即$\overline{AK} = \overline{BK}$。

因為$\angle KLA = 90^\circ = \angle BRK, \angle LAK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}BC = \angle RKB$，所以

$$\Delta BRK \cong \Delta KLA(\text{AAS 全等})\text{。}$$

4. 討論$\Delta CAB, \Delta KLA, \Delta KBR$的面積關係。

因為$\overline{KO} // \overline{AL}$ 且$\overline{KQ} // \overline{LP}$，得到$\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{KQ}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}$。今假設$\overline{AB} = c, \overline{CB} = a, \overline{AC} = b$，

可推得

$$\overline{KQ} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} \times \overline{LP} = \frac{b-a}{b} \times \frac{1}{2}b = \frac{b-a}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta KLA\text{面積} &= \Delta CAL\text{面積} - \Delta CAK\text{面積} \\ &= \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b \times \frac{b-a}{2} = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}\Delta CAB\text{面積}\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\Delta CAB\text{面積} &= 2\Delta KLA\text{面積} \\ &= \Delta KLA\text{面積} + \Delta KBR\text{面積}\end{aligned}$$

5. 最後討論 $\Delta KAB, \Delta CBR, \Delta CAL$ 的面積關係，進而推出勾股定理的關係式。

因為四邊形 $ABRL$ 面積 $= \Delta CAB$ 面積 $+ \Delta CAL$ 面積 $+ \Delta CBR$ 面積

$= \Delta KAB$ 面積 $+ \Delta KLA$ 面積 $+ \Delta KBR$ 面積

又因為 ΔCAB 面積 $= \Delta KLA$ 面積 $+ \Delta KBR$ 面積 ，所以

$(\Delta KLA$ 面積 $+ \Delta KBR$ 面積$) + \Delta CAL$ 面積 $+ \Delta CBR$ 面積

$= \Delta KAB$ 面積 $+ \Delta KLA$ 面積 $+ \Delta KBR$ 面積

得到

ΔKAB 面積 $= \Delta CBR$ 面積 $+ \Delta CAL$ 面積

即

$$\frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

得到

$$c^2 = a^2 + b^2$$ 。

【註與心得】

1.來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 93). Amsterdam: A. Versluys.

2.心得：此題的作圖方式較為複雜，經由平行線截比例線段得到關係式，及邊長的關係，求出各三角形的面積。再透過各三角形間面積的關係，推出勾股定理的關係式。整體證明過程雖然不難理解，但對於國中生而言不易朝此方向思考，在教學上若使用此方式，也不易引起學生的學習動機。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4.補充

等腰直角三角形斜邊長為 c ，則其面積為 $\frac{1}{4}c^2$ 。